Молодечненский государственный политехнический техникум

Инструкция к практическому занятию: Логарифмические неравенства.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать некоторые приёмы решения логарифмических неравенств.
2) Научиться приводить логарифмические неравенства к известным алгебраическим неравенствам, используя свойства логарифмической функции, свойства логарифмов и алгебраические преобразования.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий. Определить способ их решения.
4. Решить неравенства.
5. Оформить отчёт.
6. Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма.

При решении логарифмических неравенств полезно помнить о некоторых свойствах логарифмической функции:

1. Логарифмическая функция является монотонной и
   - если основание **a>1**, то функция $y = \log_a x$ возрастающая (большему x соответствует больший y);
   - если **0<a<1**, то функция $y = \log_a x$ убывающая (большему x соответствует меньший y).
2. Область определения логарифмической функции- все положительные действительные числа.

Указания к выполнению практической работы

Для решения логарифмических неравенств необходимо:

a) используя свойства логарифмов и известные приёмы решения логарифмических уравнений, привести неравенство к виду:

$$\boxed{\log_a f(x) < \log_a g(x)};$$

b) составить основное неравенство, используя свойство:

если **a>1**, то **f(x)<g(x)** (знак неравенства сохраняется);

если **0<a<1**, то **f(x)>g(x)** (знак неравенства меняется на противоположный);

c) к основному неравенству присоединить неравенства ОДЗ:

$f(x)>0$;

$g(x)>0$;

$a>0$;

$a\neq 1$

и решить полученную систему неравенств.

Пример 1. $\log_{\frac{1}{49}}(8-x) \le -\frac{1}{2}$

Решение. a) Приведём неравенство к нужному виду. Для этого число –1/2 умножим на $1=\log_a a$, а затем по свойству логарифма степени получим:

$$\log_{\frac{1}{49}}(8-x) \le -\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{1}{49}}\left(\frac{1}{49}\right)$$

$$\log_{\frac{1}{49}}(8-x) \le \log_{\frac{1}{49}}\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

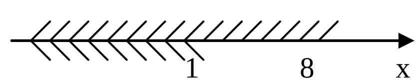
$$\log_{\frac{1}{49}}(8-x) \le \log_{\frac{1}{49}}\sqrt{49}$$

$$\log_{\frac{1}{49}}(8-x) \le \log_{\frac{1}{49}}7$$

b) Составим основное неравенство. Т. к. основание 0<1/49<1, то знак неравенства нужно поменять: $8-x\ge 7$.

c) Добавим неравенства ОДЗ и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases}8-x\ge 7\\ 8-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x\ge -1\\ -x>-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x<8\end{cases}$$



Ответ: $x\in(-\infty;1]$

Пример 2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(3x)$

Решение. Приведём уравнение к нужному виду, для этого заменим сумму логарифмов на логарифм произведения.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(3x)$$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > \log_{\frac{1}{2}}\big((x-3)\cdot 3x\big)$ Основание $0 < \frac{1}{2} < 1$, знак неравенства меняется

$$\begin{cases} x+8 < (x-3)\cdot 3x \\ x+8 > 0 \\ x-3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x - 8 > 0 \\ x > -8 \\ x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x - 8 > 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

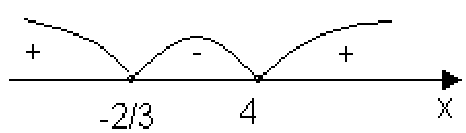
Сначала решим квадратное неравенство методом интервалов:

$3x^2 - 10x - 8 > 0;$

$3x^2 - 10x - 8 = 0$

$x_1 = 4; x_2 = -\frac{2}{3};$

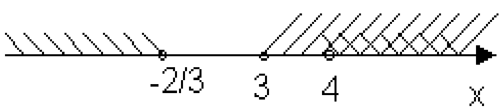
$3(x-4)(x+\frac{2}{3}) > 0$



$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (4; +\infty).$

Теперь надо найти общее решение системы:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (4; +\infty) \\ x > 3 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (4; +\infty)$

Пример 3. $\log_{0,5} \frac{x^2 - 4}{x + 10} > -1$

Решение. Приведём уравнение к нужному виду и составим систему неравенств:

$\log_{0,5} \frac{x^2 - 4}{x + 10} > -\log_{0,5} 0,5$

$\log_{0,5} \frac{x^2 - 4}{x + 10} > \log_{0,5} (0,5)^{-1}$

$\log_{0,5} \frac{x^2 - 4}{x + 10} > \log_{0,5} 2$

Основание логарифмов 0<0,5<1, поэтому знак неравенства необходимо поменять:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 10} < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x + 10} > 0 \end{cases}$$ решим каждое неравенство методом интервалов

1-ое неравенство:

$$\frac{x^2-4}{x+10}<2$$

$$\frac{x^2-4}{x+10}-2<0$$

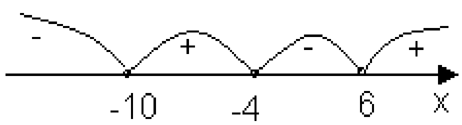
$$\frac{x^2-4-2\cdot(x-10)}{x+10}<0$$

$$\frac{x^2-2x-24}{x+10}<0$$

нанесём на числовую прямую точки:

$x = -4,\ x = 6,\ x \neq -10$

$(x+4)(x-6)(x+10)<0$



$x \in (-\infty;-10) \cup (-4;6)$

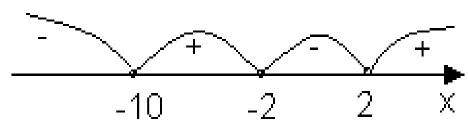
2-ое неравенство:

$$\frac{x^2-4}{x+10}>0$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+10}>0$$

нанесём на числовую прямую:

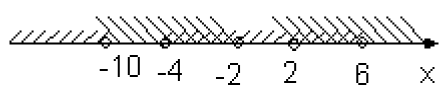
$x = 2,\ x = -2,\ x \neq -10$



$x \in (-10;-2) \cup (2;+\infty)$

Теперь найдём общее решение системы. Для этого нанесём решения двух неравенств на числовую прямую и посмотрим, где решения пересекутся:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-10) \cup (-4;6) \\ x \in (-10;-2) \cup (2;+\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-4;-2) \cup (2;6)$

Замечание. Если основание логарифма также содержит переменную x ($\log_{u(x)} f(x) > \log_{u(x)} g(x)$), то данное неравенство сводится к решению двух систем алгебраических неравенств:

$$\begin{cases} u(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < u(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Тогда множество решений логарифмического неравенства находится как объединение множеств решений этих двух систем.

Пример. $\log_x\left(2x - \frac{3}{4}\right) > 2$

Решение. Приведём неравенство к нужному виду, для этого число 2 умножим на $1 = \log_a a$ и получим:

$$\log_x\left(2x - \frac{3}{4}\right) > 2 \cdot \log_x x$$

$$\log_x\left(2x - \frac{3}{4}\right) > \log_x x^2$$

Т. к. основание логарифма содержит переменную x, то данное неравенство сводится к решению двух систем алгебраических неравенств:

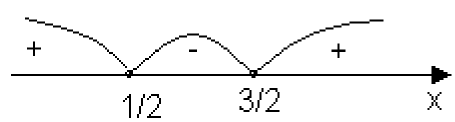
$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x - \frac{3}{4} > x^2 \\ 2x - \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} < x^2 \\ 2x - \frac{3}{4} > 0 \end{cases}$$

Сначала решим квадратное неравенство:

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} < 0 \quad \text{или} \quad 4x^2 - 8x + 3 < 0$$

Найдём нули функции :

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

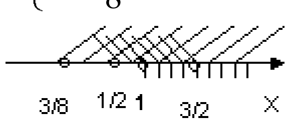


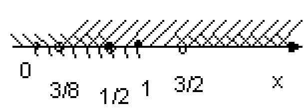
$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$$

Для 1-ой системы нам подходит интервал $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, а для второй

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Теперь изобразим решения двух систем:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ x > \frac{3}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \\ x > \frac{3}{8} \end{cases}$$





Контрольные вопросы:

1) Какое неравенство называется логарифмическим?
2) О каких свойствах логарифмической функции полезно помнить при решении логарифмических неравенств?
3) Каковы этапы решения логарифмического неравенства? Какие неравенства ОДЗ надо включить в систему неравенств?
4) Как решается логарифмическое неравенство, если в основании логарифма также содержится переменная х?