Учреждение образования «Молодечненский государственный политехнический колледж»

Инструкция к практической работе:

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Разработчик: Ж.И. Тимошко

Цель работы: 1. Сформировать навыки преобразования тригонометрических выражений.
2. Закрепить понятия тригонометрической функции.
3. Сформировать навыки применения формул сложения, формул приведения.

Порядок выполнения работы:

1. Ответьте на контрольные вопросы:
   а) назовите основные тригонометрические тождества;
   б) сформулируйте правила, которые применяются в формулах приведения;
   в) запишите формулы тригонометрических функций алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения);
   г) запишите формулы тригонометрических функций удвоенного аргумента;
   д) запишите формулы преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение.

2. Изучите условия заданий.

3. Выполните задания.

4. Оформите отчёт о работе.

Указания к выполнению практической работы:

Пример 1. Вычислить: $\sin 34^0 \cdot \cos 146^0 + \cos 34^0 \cdot \sin 146^0$.
Решение. $\sin 34^0 \cdot \cos 146^0 + \cos 34^0 \cdot \sin 146^0 = \sin(34^0 + 146^0) = \sin 180^0 = 0$
Ответ: 0.

Пример 2. Упростить выражение: $\mathrm{ctg}(\alpha + 180^0) + \mathrm{tg}(\alpha - 90^0)$.
Решение. $\mathrm{Ctg}(\alpha + 180^0) + \mathrm{tg}(\alpha - 90^0) = \mathrm{ctg}(180^0 + \alpha) + \mathrm{tg}(-90^0 + \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha +$
$+\mathrm{tg}\left(-(90^0 - \alpha)\right) = \mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha = 0$
Ответ: 0.

Пример 3. Преобразовать в произведение: $\cos 6\alpha - \sin\alpha$.
Решение.

$$\cos 6\alpha - \sin\alpha = \cos 6\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -2\sin\frac{6\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cdot \sin\frac{6\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} = -2 \cdot \sin\left(\frac{5\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $-2 \cdot \sin\left(\frac{5\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Пример 4. Вычислить без таблиц: $\frac{2 \cdot \cos 40^0 - \cos 20^0}{\sin 20^0}$.

Решение.

$$\frac{2\cos 40^0 - \cos 20^0}{\sin 20^0} = \frac{\cos 40^0 + \cos 40^0 - \cos 20^0}{\sin 20^0} = \frac{\cos 40^0 - 2\sin 30^0 \sin 10^0}{\sin 20^0} = \frac{\cos 40^0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 10^0}{\sin 20^0} =$$

$$= \frac{\cos 40^0 - \sin(90^0 - 80^0)}{\sin 20^0} = \frac{\cos 40^0 - \cos 80^0}{\sin 20^0} = \frac{-2\sin\frac{40^0 + 80^0}{2} \cdot \sin\frac{40^0 - 80^0}{2}}{\sin 20^0} =$$

$$= -\frac{2\sin 60^0 \cdot \sin(-20^0)}{\sin 20^0} = \frac{2\sin 60^0 \cdot \sin 20^0}{\sin 20^0} = 2\sin 60^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Пример 5.

а) Вычислить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ если $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение.

1) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

2) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + ctg^2\alpha}}$.

Поставим знак «-», так как α находится в III четверти, получим

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3}{9}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

Поставим знак «-», так как α находится в III четверти, получим

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

б) Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ - II четверть.

Решение.

1) По условию задачи $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, следовательно $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ – I четверть.

2) Найдём функцию $\cos\alpha$, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \underset{\text{II ч.}}{\pm}\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

3) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \underset{\text{I ч.}}{\pm}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}:2} = \sqrt{\frac{1}{10}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$

4) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Longrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \underset{\text{I ч.}}{\pm}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}:2} = \sqrt{\frac{9}{10}} =$
$= \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Пример 6. Докажите тождества:

а) $16\cdot\sin^4\alpha - (\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha)^2 = 24\cdot\sin^2\alpha - 9$

Доказательство:

$16\cdot\sin^4\alpha - (\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha)^2 = 16\cdot\sin^4\alpha - (\sin^4\alpha - 6\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + 9\cdot\cos^4\alpha) = 16\cdot\sin^4\alpha -$
$- \sin^4\alpha + 6\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 9\cdot\cos^4\alpha = 15\cdot\sin^4\alpha + 6\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 9\cdot\cos^4\alpha =$
$= 15\cdot\sin^4\alpha + 15\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 9\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 9\cdot\cos^4\alpha = 15\cdot\sin^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) -$
$-9\cdot\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 15\cdot\sin^2\alpha\cdot 1 - 9\cdot\cos^2\alpha\cdot 1 = 15\cdot\sin^2\alpha - 9\cdot(1-\sin^2\alpha) =$
$= 15\cdot\sin^2\alpha - 9 + 9\cdot\sin^2\alpha = 24\cdot\sin^2\alpha - 9.$

Ответ: Тождество верно.

b) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right) = \operatorname{tg}(2\pi-\alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

Решение. Будем одновременно преобразовывать левую и правую части

$-\operatorname{tg}\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha;$

$-\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha;$

$-\operatorname{tg}\alpha - 1\cdot\operatorname{tg}2\alpha = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha;$

$-\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha.$

Ответ: Тождество верно.

Пример 7. Упростить выражение:

$$\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}+\cos^2\frac{\alpha}{4}+2\cdot\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}-\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}+\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\cdot\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}=$$

$$\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}=\left|\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right|=\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}=2\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $2\sin\frac{\alpha}{4}$.