Министерство образования Республики Беларусь
Молодечненский государственный политехнический техникум

Практическая работа: Решение тригонометрических уравнений, приводимых к простейшим.

Разработчик: ***И. А. Кочеткова, Ж. И. Тимошко***

Цель работы:

1) Повторить основные тригонометрические формулы;
2) Повторить определения обратных тригонометрических функций и их свойства;
3) Повторить формулы приведения;
4) Закрепить умения решать простейшие тригонометрические уравнения;
5) Закрепить основные методы решения тригонометрических уравнений (введение новой переменной, разложения на множители способом вынесения за скобки и с помощью тригонометрических формул).

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы:
   - **2.1.** Какие уравнения называются простейшими тригонометрическими? Как они решаются?
   - **2.2.** При каких а имеют решения уравнения $\boldsymbol{sinx = a}$ и $\boldsymbol{cosx = a}$?
   - **2.3.** Что значит частные случаи и когда они применяются?
   - **2.4.** Перечислите методы решения тригонометрических уравнений
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить примеры.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

При решении практических заданий используйте таблицы:

Таблица1

Таблица значений обратных тригонометрических функций							
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsinx	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
arccosx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	
arctgx	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctgx	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Таблица 2.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	**Решение**	**Частные случаи**		
		a=-1	**a=0**	**a=1**
$\sin x = a, \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a, \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$
$tgx = a, a \in R$	$x = arctga + \pi k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
$ctgx = a, a \in R$	$x = arcctga + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

и свойства:

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{arcsin(-x) = -arcsinx}\\ &\boldsymbol{arccos(-x) = \pi - arccosx}\\ &\boldsymbol{arctg(-x) = -arctgx}\\ &\boldsymbol{arcctg(-x) = \pi - arcctgx}\end{aligned}}$$

<u>Задание № 1.</u> Решить уравнение $\boldsymbol{sin7x \cdot cos2x - cos7x \cdot sin2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

<u>Решение.</u>

В №1 нужно использовать одну из формул сложения (выберите, сравнив формулы с условием):

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$,

$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$,

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$,

$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy}$,

$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx \cdot tgy}$,

$ctg(x+y) = \frac{ctgx \cdot ctgy - 1}{ctgx + ctgy}$,

$ctg(x-y) = \frac{ctgx \cdot ctgy + 1}{ctgy - ctgx}$

1) Используем формулу сложения $\boxed{\boldsymbol{sin(x-y) = sinx \cdot cosy - cosx \cdot siny}}$

$$sin7x \cdot cos2x - cos7x \cdot sin2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$sin(7x - 2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$sin5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Получили простейшее тригонометрическое уравнение вида $sinx = a$ (смотрите таблицу 2)

$$5x = (-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k, k \in Z$$
$$5x = (-1)^k \left(-arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k, k \in Z$$
$$5x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k, k \in Z$$
$$5x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$
$$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$$

Ответ. $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$

<u>Задание № 2.</u> Решить уравнения

1) $tg^2x - 3 = 0$
2) $8sin^2 9x - 4 = 0$

<u>Решение.</u>

1) Это неполное квадратное уравнение относительно tgx.

$$tg^2x = 3$$
$$tgx = \pm\sqrt{3}$$

Получили два простейших тригонометрических уравнения:

$$tgx = \sqrt{3}$$

Смотрим решение в таблице 1

$$x = arctg\sqrt{3} + \pi k, k \in Z$$
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$tgx = -\sqrt{3}$$

Смотрим решение в таблице 1

$$x = arctg(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in Z$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

2) Для решения данного типа уравнений можно использовать формулы половинного аргумента или формулы понижения степени:

$$\boxed{\boldsymbol{cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{2}; \quad sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{2}}}$$

$8sin^2 9x - 4 = 0$

$8 \cdot \frac{1 - cos18x}{2} - 4 = 0$

$4 \cdot (1 - cos18x) - 4 = 0$

$4 - 4cos18x - 4 = 0$

$-4cos18x = 0$

$cos18x = 0$

Получили простейшее тригонометрическое уравнение, таблице 2 смотрим частный случай (a=0):

$$18x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Разделим уравнение на 18 (или умножим на $\frac{1}{18}$) и получим: $x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{18}, k \in Z$

Ответ. $x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{18}, k \in Z$

<u>Задание № 3.</u> Решить уравнения

1) $2sin^2x - 9sinx + 4tg^2\frac{7\pi}{4} = 0$
2) $5sin^2 6x + 4cos6x - 4 = 0$
3) $cos2x - \sqrt{2}sinx + 1 = 0$

<u>Решение.</u>

Все уравнения в данном номере можно с помощью подстановки (замены переменной) привести к полным квадратным уравнениям вида:

$$\boxed{at^2 + bt + c = 0}$$

Для этого

1) В уравнении $\mathbf{2sin^2x - 9sinx + 4tg^2\frac{7\pi}{4} = 0}$ вычислим

$tg\frac{7\pi}{4} = tg\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = tg\left(\overbrace{2\pi - \frac{\pi}{4}}^{IV\text{чт}, "-"}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$, значит $tg^2\frac{7\pi}{4} = (-1)^2 = 1$. Подставим в уравнение и получим:

$$2sin^2x - 9sinx + 4 = 0$$

Теперь заменим $\boldsymbol{sinx = t}$, где $t \in [-1; 1]$:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

Решим получившееся квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 32 = 49 = 7^2$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{9 - 7}{4} = \frac{1}{2}; \quad t_2 = \frac{9 + 7}{4} = 4 \text{ (не подходит)}$$

Получили, что $\boldsymbol{sinx = \frac{1}{2}}$. Смотрим решение в таблице 2 и получаем ответ:

$$x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

2) Для решения второго уравнения $\mathbf{5sin^2 6x + 4cos6x - 4 = 0}$ используем основное тригонометрическое тождество $\boxed{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$.

Из него выразим $\boxed{\mathbf{sin^2 \propto = 1 - cos^2 \propto}}$ и подставим в уравнение, получим

$$5(1 - cos^2 6x) + 4cos6x - 4 = 0$$

$$5 - 5cos^2 6x + 4cos6x - 4 = 0$$

$$-5cos^2 6x + 4cos6x + 1 = 0$$

$$5cos^2 6x - 4cos6x - 1 = 0$$

Теперь заменим $\boldsymbol{cos6x = t}$, где $t \in [-1; 1]$:

$$5t^2 - 4t - 1 = 0$$

Решим получившееся квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{4 - 6}{10} = -\frac{1}{5}; \quad t_2 = \frac{4 + 6}{10} = 1$$

Получили, что $\boldsymbol{cos6x = -\frac{1}{5}}$ или $\boldsymbol{cos6x = 1}$. Смотрим решение в таблице 2 и получаем ответ:

$$cos6x = -\frac{1}{5}$$
$$6x = \pm arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z$$
$$6x = \pm\left(\pi - arccos\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z$$
$$x = \pm\frac{1}{6}\cdot\left(\pi - arccos\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

$$cos6x = 1$$
Частный случай а=1:
$$6x = 2\pi k, k \in Z$$
$$x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

Ответ. $x = \pm\frac{1}{6}\cdot\left(\pi - arccos\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi k}{3}, k \in Z, \quad x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$

3) При решении третьего уравнения $\boldsymbol{cos2x - \sqrt{2}sinx + 1 = 0}$, необходимо использовать формулы

$$\boxed{\boldsymbol{cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha}}$$

Так как данное уравнение содержит $\boldsymbol{sinx}$, то $cos2\alpha$ заменим по формуле $\boxed{\boldsymbol{cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha}}$ и получим:

$$1 - 2sin^2x - \sqrt{2}sinx + 1 = 0$$
$$-2sin^2x - \sqrt{2}sinx + 2 = 0$$
$$2sin^2x + \sqrt{2}sinx - 2 = 0$$

Теперь заменим $\boldsymbol{sinx = t}$, где $t \in [-1; 1]$:

$$2t^2 + \sqrt{2}t - 2 = 0$$

Решим получившееся квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 2 + 16 = 18 = (9\cdot 2) = (3\sqrt{2})^2$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$t_1 = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t_2 = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2} < -1 \text{ (не подходит)}$$

Получили, что $\boldsymbol{sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Смотрим решение в таблице 2 и получаем ответ:

$$x = (-1)^k arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in Z$$
$$x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Задание № 4. Решить уравнения:
1) $\sqrt{2}\cdot cos^2 4x - cos4x = 0$;
2) $2cosx + \sqrt{2}sin2x = 0$
Решения.
При решении уравнения номера 4 используется метод вынесения общего множителя за скобки:

$\boxed{\textbf{1)}}$ $\boldsymbol{\sqrt{2}\cdot cos^2 4x - cos4x = 0}$

$$cos4x\cdot\left(\sqrt{2}cos4x - 1\right) = 0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, поэтому:

$$cos4x = 0 \text{ или } \sqrt{2}cos4x - 1 = 0$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблиц 1 и 2:

$$cos4x = 0$$
Частный случай а=0:

$$\sqrt{2}cos4x = 1$$

$$4x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$
$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z$$

$$cos4x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$4x=\pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k, k\in Z$$
$$4x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$$
$$x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z; x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$

2) При решении данного уравнения используется не только метод вынесения общего множителя за скобки, но и формула $\boxed{\boldsymbol{sin2x=2sinx\cdot cosx}}$:

$$2cosx+\sqrt{2}sin2x=0$$
$$2cosx+2\sqrt{2}sinx\cdot cosx=0$$
$$2cosx\left(1+\sqrt{2}sinx\right)=0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, поэтому:

$$cosx=0 \text{ или } 1+\sqrt{2}sinx=0$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблиц 1 и 2:

$$cosx=0$$
Частный случай a=0:
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$\sqrt{2}sinx=-1$$
$$sinx=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x=(-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in Z$$
$$x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k, k\in Z$$
$$x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\ x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Задание № 5. Решить уравнения:
1. $cos5x-cos2x=0$
2. $sin5x+cos2x=0$

Решения.

При решении уравнений номера 5 используются формулы «Преобразования суммы тригонометрических функций в произведения»:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

1) Используем формулу $\boxed{\boldsymbol{cosx-cosy=-2sin\frac{x+y}{2}\cdot sin\frac{x-y}{2}}}$ и получим уравнение:

$$-2sin\frac{5x+2x}{2}\cdot sin\frac{5x-2x}{2}=0$$
$$-2sin\frac{7x}{2}\cdot sin\frac{3x}{2}=0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, поэтому:

$$sin\frac{7x}{2}=0 \quad \text{или} \quad sin\frac{3x}{2}=0$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблиц 1 и 2:

$$sin\frac{7x}{2}=0$$

Частный случай a=0:

$$\frac{7x}{2}=\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{2}{7}\pi k, k\in Z$$

$$sin\frac{3x}{2}=0$$

Частный случай a=0:

$$\frac{3x}{2}=\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$$

Ответ. $x=\frac{2}{7}\pi k, k\in Z;\quad x=\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$

2) $\boldsymbol{sin5x+cos2x=0}$

При решении данного уравнения номера 5 используются не только формулы «Преобразования суммы тригонометрических функций в произведения», но и «Формулы приведения»

$$\boxed{\cos\alpha=\sin(90^0-\alpha)}, \qquad \boxed{\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)},$$

которые позволяют изменить название функции:

$$cos(90^0-5x)+cos2x=0$$

Используем формулу $\boxed{\boldsymbol{cosx+cosy=2cos\frac{x+y}{2}\cdot cos\frac{x-y}{2}}}$ и получим уравнение:

$$2cos\frac{90^0-5x+2x}{2}\cdot cos\frac{90^0-5x-2x}{2}=0$$

$$2cos\frac{90^0-3x}{2}\cdot cos\frac{90^0-7x}{2}=0$$

$$2cos\left(45^0-\frac{3}{2}x\right)\cdot cos\left(45^0-\frac{7}{2}x\right)=0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, поэтому:

$$cos\left(45^0-\frac{3}{2}x\right)=0 \ \text{ или } \ cos\left(45^0-\frac{7}{2}x\right)=0$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблиц 1 и 2:

$$cos\left(45^0-\frac{3}{2}x\right)=0$$

Функция четная, поэтому

$$cos\left(\frac{3}{2}x-45^0\right)=0$$

Частный случай a=0:

$$\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$\frac{3}{2}x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$$

$$cos\left(45^0-\frac{7}{2}x\right)=0$$

Функция четная, поэтому

$$cos\left(\frac{7}{2}x-45^0\right)=0$$

Частный случай a=0:

$$\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$\frac{7}{2}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$\frac{7}{2}x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{3\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z;\ x=\frac{3\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z$

Задание № 6. Решить уравнение $\boldsymbol{cos8x\cdot cos5x-cos9x\cdot cos4x=0}$

В №6 нужно использовать одну из формул «Преобразования произведения тригонометрических функций в сумму»:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

В данном примере используем формулу $\boxed{\boldsymbol{cos x \cdot cos y = \frac{1}{2}\left(cos(x-y) + cos(x+y)\right)}}$ и получим уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(cos(8x-5x) + cos(8x+5x)\right) - \frac{1}{2}\left(cos(9x-4x) + cos(9x+4x)\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}(cos3x + cos13x) - \frac{1}{2}(cos5x + cos13x) = 0$$

Умножим уравнение на 2 и затем раскроем скобки:

$$(cos3x + cos13x) - (cos5x + cos13x) = 0$$

$$cos3x + cos13x - cos5x - cos13x = 0$$

$$cos3x - cos5x = 0$$

Используем формулу «Преобразования суммы тригонометрических функций в произведения» $\boxed{\boldsymbol{cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2} \cdot sin\frac{x-y}{2}}}$ и получим уравнение:

$$-2sin\frac{3x+5x}{2} \cdot sin\frac{3x-5x}{2} = 0$$

$$-2sin4x \cdot \sin(-2x) = 0$$

$$2sin4x \cdot \sin 2x = 0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, поэтому:

$$sin4x = 0 \quad \text{или} \quad sin2x = 0$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблиц 1 и 2:

$sin4x = 0$

Частный случай a=0:

$$4x = \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z$$

$sin2x = 0$

Частный случай a=0:

$$2x = \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ. $x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z$; $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$