Министерство образования Республики Беларусь
Молодечненский государственный политехнический колледж

Практическая работа: Нахождение производных элементарных функций.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать навыки вычисления производных элементарных функций, суммы, произведения, частного двух функций.
2) Развить математическое мышление, навыки работы с таблицей производных, умение вычислить производную.
3) Повторить определение степени с рациональным показателем и её свойства.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий и используя таблицу и правила дифференцирования, вычислить производные функций.
4. Оформить отчёт.

Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

Правила дифференцирования функций:

1) Постоянный множитель **k** (k – некоторое действительное число) можно выносить за знак производной.
2) Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) их производных.
3) Производная произведения двух функций вычисляется по формуле:
4) Производная частного двух функций вычисляется по формуле:

$(ku)' = k \cdot u'$ (k=const)
$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Таблица производных:

1	$(C)' = 0$, C=const
2	$(x)' = 1$
3	$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6	$(\sin x)' = \cos x$
7	$(\cos x)' = -\sin x$
8	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
11	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
12	$(a^x)' = a^x \cdot \ln x$ (a^x -показательная функция)
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
17	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Указания к выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить производную функции $y = \lg x \cdot 13^x$

Решение.

Для вычисления производной используем формулы: $\boxed{(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$ и № 11, 12

$$y' = (\lg x \cdot 13^x)'$$
$$= (\lg x)' \cdot 13^x + \lg x \cdot (13^x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10} \cdot 13^x + \lg x \cdot 13^x \cdot \ln 13 = 13^x \cdot \left(\frac{1}{x \cdot \ln 10} + \lg x \cdot \ln 13\right)$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y = (x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 2x + 18)$

Решение.

Для вычисления производной используем формулы: $\boxed{(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$, $\boxed{(u + v)' = u' + v'}$, $\boxed{(ku)' = k \cdot u'}$ и № 3, 1, 2.

$$y' = \left((x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 2x + 18)\right)' = (x^2 + 1)' \cdot (3x^2 - 2x + 18) + (x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 2x + 18)' =$$
$$= ((x^2)' + (1)') \cdot (3x^2 - 2x + 18) + (x^2 + 1) \cdot \left((3x^2)' - (2x)' + (18)'\right) = 2x \cdot (3x^2 - 2x + 18) +$$
$$+(x^2 + 1) \cdot (6x - 2) = 6x^3 - 4x^2 + 36x + 6x^3 - 2x^2 + 6x - 2 = 12x^3 - 6x^2 + 42x - 2$$

Пример 3. Вычислить производную функции $y = \frac{4x - 7}{x^2 + 4}$

Решение.

Для вычисления производной используем формулы: $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$, $\boxed{(u + v)' = u' + v'}$, $\boxed{(ku)' = k \cdot u'}$ и № 3, 1, 2.

$$y' = \left(\frac{4x - 7}{x^2 + 4}\right)' = \frac{(4x - 7)' \cdot (x^2 + 4) - (4x - 7) \cdot (x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} =$$
$$= \frac{((4x)' - (7)') \cdot (x^2 + 4) - (4x - 7) \cdot ((x^2)' + (4)')}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 \cdot (x^2 + 4) - (4x - 7) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} =$$
$$= \frac{4x^2 + 16 - 8x^2 + 14x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-4x^2 + 14x + 16}{(x^2 + 4)^2}$$

Пример 4. Вычислить производную функции $y = \frac{\cos x}{1 - 5x^2}$

Решение.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{1 - 5x^2}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot (1 - 5x^2) - \cos x \cdot (1 - 5x^2)'}{(1 - 5x^2)^2} = \frac{-\sin x \cdot (1 - 5x^2) - \cos x \cdot (0 - 10x)}{(1 - 5x^2)^2} =$$
$$= \frac{-\sin x + 5 \cdot x^2 \cdot \sin x + 10x \cdot \cos x}{(1 - 5x^2)^2}$$

Пример 5. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{5x^5} + \frac{7}{16x^4} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} - 3$.

Решение.

Чтобы найти производную данной функции, сначала необходимо использовать свойство степени $\boxed{\frac{1}{a^x} = a^{-x}}$ и привести к функцию к табличному виду.

$$y = \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{7}{16}x^{-4} - 2x^{-3} + \frac{1}{x} - 3.$$

Теперь используем формулы: $\boxed{(u + v)' = u' + v'}$, $\boxed{(ku)' = k \cdot u'}$, № 3, 5 и 1.

$$y' = \left(\frac{1}{5}x^{-5} + \frac{7}{16}x^{-4} - 2x^{-3} + \frac{1}{x} - 3\right)' = \left(\frac{1}{5}x^{-5}\right)' + \left(\frac{7}{16}x^{-4}\right)' - (2x^{-3})' + \left(\frac{1}{x}\right)' - (3)' =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot(-5)\cdot x^{-6} + \frac{7}{16}\cdot(-4)\cdot x^{-5} - 2\cdot(-3)\cdot x^{-4} - \frac{1}{x^2} - 0 = -x^{-6} - \frac{7}{4}\cdot x^{-5} + 6\cdot x^{-4} - \frac{1}{x^2} =$$
$$= -\frac{1}{x^6} - \frac{7}{4x^5} + \frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^2}$$

Пример 6. Вычислить производную функции $y = \sqrt[4]{x^7} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^{10}}}$.

Решение.
Чтобы найти производную данной функции, сначала необходимо использовать свойства степеней $\boxed{\frac{1}{a^x} = a^{-x}}$, $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$ и привести к функцию к табличному виду.

$$y = \sqrt[4]{x^7} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^{10}}} = x^{\frac{7}{4}} + 3\cdot x^{-\frac{10}{3}}$$

Теперь используем формулы: $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$, $\boxed{(ku)' = k\cdot u'}$ и № 3:

$$y' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' + 3\cdot\left(x^{-\frac{10}{3}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-\frac{4}{4}} + 3\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)x^{-\frac{10}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} - 10\cdot x^{-\frac{13}{3}} = \frac{7}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3} - \frac{10}{\sqrt[3]{x^{13}}}$$

Пример 7. Вычислить производную функции $y = x^2\cdot\sqrt[4]{x^7} + \frac{3\cdot x}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

Решение.
Чтобы найти производную данной функции, сначала необходимо использовать свойства степеней $\boxed{\frac{1}{a^x} = a^{-x}}$, $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$, $\boxed{a^x\cdot a^y = a^{x+y}}$, и привести к функцию к табличному виду.

$$y = x^2\cdot\sqrt[4]{x^7} + \frac{3x}{\sqrt[3]{x^{10}}} = x^2\cdot x^{\frac{7}{4}} + 3\cdot x\cdot x^{-\frac{10}{3}} = x^{\frac{15}{4}} + 3\cdot x^{-\frac{7}{3}}.$$

Теперь используем формулы: $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$, $\boxed{(ku)' = k\cdot u'}$ и № 3:

$$y' = \left(x^{\frac{15}{4}}\right)' + 3\cdot\left(x^{-\frac{7}{3}}\right)' = \frac{15}{4}x^{\frac{15}{4}-\frac{4}{4}} + 3\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)x^{-\frac{7}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{15}{4}x^{\frac{11}{4}} - 7\cdot x^{-\frac{10}{3}} = \frac{15}{4}\cdot\sqrt[4]{x^{11}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x^{10}}}$$

Контрольные вопросы:
1) Что называется производной?
2) Какая функция называется дифференцируемой?
3) Сформулируйте правила дифференцирования.
4) Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.