Инструкция к практическому занятию: «Применение метода интервалов»

Преподаватель И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Отработать навыки решений неравенств методом интервалов.
2. Развить математическое мышление, наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) для каких неравенств может быть применён метод интервалов?
   б) как определить промежутки, на которые разбивается прямая при применении метода интервалов?
   в) как определить знак в каждом из полученных промежутков и как нужно выбирать ответ?
   г) в каких случаях знаки чередуются, и как следует поступить, если чередование знаков не имеет места?

2. Используя указания к практической работе, решить неравенство методом интервалов.

3. Оформить решение.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}} \qquad (1)$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_p$ – натуральные числа и где

$a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$; $a_i \neq b_j$ ($i=1, 2, \ldots, k$; $j=1, 2, \ldots, p$).

В точках $x=a_i$ функция обращается в нуль (эти точки называют *нулями функции*), в точках $x=b_j$ функция не имеет смысла (эти точки называют *точками разрыва функции f(x)*).

Если все нули функции и точки разрыва отметить на числовой прямой, то они разобьют её на k+p+1 промежутков. Внутри каждого из этих промежутков функция f(x) непрерывна и сохраняет постоянный знак.

На практике для решения неравенства f(x)>0 (соответственно <, ≥, ≤), где f(x) – функция вида (1), применяют так называемый ***метод интервалов*** – геометрический метод решения, основанный на следующих трёх достаточно очевидных утверждениях:

1) Если *c*- наибольшее из чисел a_i, b_j, то в промежутке (c, ∞) функция f(x) положительна.
2) Если a_i (соответственно b_j) – такая точка, что показатель степени h_i выражения $(x-a_i)^{h_i}$ есть число нечётное, то справа и слева от a_i (или b_j), то есть в смежных промежутках, функция f(x) имеет противоположные знаки.

Такую точку a_i (соответственно b_j) будем называть *простой*.

3) Если a_i (соответственно b_j) – такая точка, что показатель степени h_i выражения $(x-a_i)^{h_i}$ есть число чётное, то справа и слева от a_i, т. е. в смежных промежутках, функция имеет одинаковые знаки.

Такую точку a_i (соответственно b_j) будем называть *двойной*.

Высказанное выше утверждение означает, что при переходе через двойную точку функция f(x) не меняет знака.

Метод интервалов, основанный на сформулированных выше трёх утверждениях, применяется для решения неравенства вида:

$$\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}} > 0 \qquad \text{(соответственно <, ≥, ≤)} \qquad (2)$$

Метод интервалов заключается в следующем:

1) Привести неравенство к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (если необходимо).
2) Найти нули функции (точки, в которых числитель *P(x)* обращается в нуль). И точки разрыва функции (точки, в которых функция не существует, т.е. точки, в которых знаменатель *Q(x)* обращается в нуль).
3) Отметить найденные точки на числовой прямой в порядке возрастания.

4) На полученных интервалах расставить знаки, которые определяют в соответствии с правилом чередования знаков или непосредственным вычислением в «удобных» точках, взятых внутри этих интервалов.
5) Записать ответ, выбрав те интервалы, знак которых совпадает со знаком неравенства.

Правило чередования знаков:

Чтобы легче было определить знаки на интервалах, необходимо сначала разложить числитель и знаменатель на линейные множители, т.е. множители вида $(x-x_i)^n$. Тогда

А) если в разложении все множители в нечётной степени (n – нечётное), то знаки у функции обязательно будут чередоваться (меняться на противоположные) переходя через значения $x=x_i$.

Б) если в разложении какой – либо сомножитель $(x-x_i)^n$ в чётной степени, то при переходе через значение $x=x_i$ знак функции сохраняется. На числовой прямой в данной точке $x=x_i$ рисуется петля, определяется знак в любой «удобной» точке и затем знаки чередуются проходя через петлю.

Указания к выполнению практической работы:

Пример 1. Решить неравенство $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x-5)} > 0.$

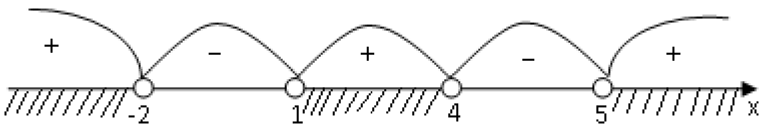
Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x-5)}$

Нули функции: $x_1=1$; $x_2=-2$.

Точки разрыва: $x_1\neq 4$; $x_2\neq 5$.

Нанесём нули функции и точки разрыва на числовую прямую и так как в разложении функции *f(x)* все множители в первой (нечетной) степени, то знаки будут чередоваться. Все точки прямой выколоты:



Выберем на числовой прямой те промежутки, знак которых совпадает со знаком неравенства. Это промежутки (-∞;-2), (1;4) и (5;∞). Их объединение и является решением заданного неравенства.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(1;4)\cup(5;\infty)$.

№1. Решите неравенства:

а) $(x+1)(x-4)(3x-6) < 0$; б) $(x^2-144)(x^2-81) > 0$;

в) $-18x(2x+2)(5x-5) \geq 0$; г) $\frac{3x+1}{3-x} > 0$; д) $\frac{(4x-1)(5-x)}{x+4} \leq 0$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{x^2-3x-18}{13x-x^2-42} \geq 0.$

Решение.

Приведём сначала неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов. Для этого сначала умножим неравенство на (-1):

$$\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42} \leq 0$$

Нули функции:

$x^2-3x-18=0$

$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-18)=9+72=81=9^2$

$x_1=\frac{3-9}{2}=-3; \quad x_2=\frac{3+9}{2}=6.$

Точки разрыва функции:

$x^2-13x+42 \neq 0$

$D=(-13)^2-4\cdot 1\cdot 42=169-168=1=1^2$

$x_1=\frac{13-1}{2}=6; \quad x_2=\frac{13+1}{2}=7.$

$x_1 \neq 6$ и $x_2 \neq 7$.

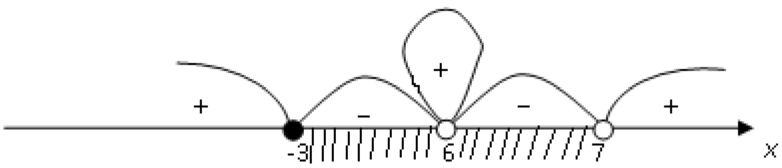
Разложим функцию $f(x)=\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42}$ на линейные множители:

$f(x)=(x+3)(x-6)(x-7)(x-6)=(x+3)(x-7)(x-6)^2$ **(*)**

Наносим все точки -3, 6, 7 на числовую прямую. Точка x=6 двойная, поэтому на прямой рисуем петлю, а точки разрыва выкалываем:

Определяем знак функции, подставив любое число в выражение (*), затем чередуем знаки, проходя через петлю.

Выберем на числовой прямой те промежутки, знак которых совпадает со знаком неравенства.



Это промежутки $x \in [-3;6) \cup (6;7)$.

Ответ: $[-3;6) \cup (6;7)$.

№2. Решите неравенства:

а) $(x^2-144)(x-6)^2<0$; б) $\frac{5x^2}{x^2-11x+28} \leq 0$;

в) $\frac{(x-1)^2(x^2-2x-3)}{(5x-x^2)\cdot(x+2)} \geq 0$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{8x+43}{(x+6)^2(x^2+11x+24)} \geq \frac{1}{x^2+9x+18}$

Решение.

Приведём сначала неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов:

$$\frac{8x+43}{(x+6)^2(x^2+11x+24)}-\frac{1}{x^2+9x+18} \geq 0$$

Разложим выражения $(x^2+11x+24)$ и $x^2+9x+18$ на линейные множители (для этого решим квадратные уравнения). Неравенство примет вид:

$$\frac{8x+43}{(x+6)^2(x^2+11x+24)} - \frac{1}{x^2+9x+18} \geq 0$$

Приведем к общему знаменателю заданные дроби:

$$\frac{8x+43-(x+6)(x+8)}{(x+6)^2(x+8)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{8x+43-(x^2+6x+8x+48)}{(x+6)^2(x+8)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{8x+43-x^2-6x-8x-48}{(x+6)^2(x+8)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2-6x-5}{(x+6)^2(x+8)(x+3)} \geq 0$$

Умножим неравенство на (-1) и поменяем его знак на противоположный:

$$\frac{x^2+6x+5}{(x+6)^2(x+8)(x+3)} \leq 0$$

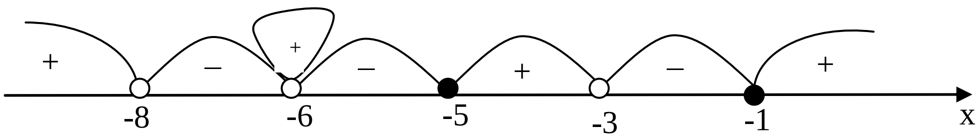
Найдём нули функции: x_1= -1; x_2= -5.

Найдём точки разрыва функции: x_1= -6; x_2= -8; x_3= -3.

Разложим функцию $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{(x+6)^2(x+8)(x+3)}$ на линейные множители:

$$f(x) = (x+1)(x+5)(x+6)^2(x+8)(x+3)$$

Отметим найденные точки на числовой прямой в порядке возрастания. На полученных интервалах расставим знаки в соответствии с правилом чередования знаков. Заметим, что в точке x=-6 рисуется петля. В результате получим:



Ответ: $(-8;-6) \cup (-6;5] \cup (-3;-1]$.

№3. Решите неравенства:

а) $\frac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2$; б) $\frac{x+1}{x-2} \geq \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3x-2-x^2} > \frac{3}{7x-4-3x^2}$.