Министерство образования Республики Беларусь
Молодечненский государственный политехнический техникум

Практическая работа: *Показательные, логарифмические уравнения и неравенства*

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Повторить определение логарифма.
2) Повторить теоремы логарифмирования, основное логарифмическое тождество, формулу перехода к новому основанию и следствия из нее.
3) Повторить основные методы решения показательных уравнений и неравенств.
4) Повторить основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Оборудование: карта индивидуального задания,
микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы:
   2.1. Что называется логарифмом некоторого числа b?
   2.2. Какой логарифм называется десятичным? Натуральным?
   2.3. Сформулировать и записать теоремы логарифмирования
   2.4. Записать формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.
   2.5. Записать следствия из формулы перехода к новому основанию.
   2.6. Перечислите методы решения показательных уравнений
   2.7. Перечислите методы решения логарифмических уравнений
   2.8. Какая функция называется показательной? логарифмической?
   2.9. Когда показательная и логарифмическая функции будут возрастающими, а когда убывающими?
   2.10. Как решаются показательные и логарифмические неравенства?
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить примеры.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Определение логарифма.

Логарифмом положительного числа **b** по положительному основанию $a \neq 1$ называется такой показатель степени **x**, в который нужно возвести **a**, чтобы получить **b**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \\ \quad b > 0, \\ \quad a > 0, a \neq 1 \end{array}}$$

a) $\mathbf{\log_{36} 6 + \log_6 1 - \log_{\frac{1}{6}} 216}$

b) $\mathbf{\log_{\frac{1}{12}}(4 \log_3 27)}$

Решение.

a) Вычисляем каждый логарифм, используя определение:

$$\mathbf{\log_{36} 6 + \log_6 1 - \log_{\frac{1}{6}} 216} = \frac{1}{2} + 0 - (-3) = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$$

b) Вычисляем сначала внутренний логарифм, а затем логарифм от полученного числа

$$\boldsymbol{log_{\frac{1}{12}}(4\, log_3 27) = log_{\frac{1}{12}}(4 \cdot 3) = log_{\frac{1}{12}} 12 = -1;}$$

Показательные уравнения

<u>Пример 1.</u> $64^{3x-4} = \sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+0,5}$

Решение. Приведём степени к одному основанию 8, для этого используем формулы $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$ и $\boxed{\frac{1}{a^x} = a^{-x}}$:

$$\left(8^2\right)^{3x-4} = 8^{\frac{1}{2}} \cdot \left(8^{-1}\right)^{2x+0,5},$$

$8^{6x-8} = 8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-2x-0,5}$; В правой части уравнения используем формулу $\boxed{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$

$$8^{6x-8} = 8^{0,5-2x-0,5};$$

$$8^{6x-8} = 8^{-2x}$$

6x-8=-2x; 8x=8; x=1

Ответ. 1.

<u>Пример 2.</u> $4^{x+2} - 3 \cdot 4^{x-1} = 122$

Решение. Применим формулы $\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y}$ и $\boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$, тогда уравнение примет вид:

$$4^x \cdot 4^2 - \frac{3 \cdot 4^x}{4^1} = 122; \qquad 4^x \cdot 16 - \frac{3 \cdot 4^x}{4} = 122$$

Вынесем неизвестную степень 4^x за скобки и разделим уравнение на число, получившееся в скобках:

$$4^x \cdot \left(16 - \frac{3}{4}\right) = 122;$$

$$4^x \cdot \frac{61}{4} = 122; \quad 4^x = 122 \cdot \frac{4}{61}; \quad 4^x = 8; \quad 2^{2x} = 2^3;$$

$$2x = 3; \quad x = \frac{3}{2}$$

Ответ. $\frac{3}{2}$

Пример 3. $2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2^x + \frac{2}{2^x} - 3 = 0$ и заменим $2^x = t, \quad t > 0$, тогда уравнение примет вид:

$t + \frac{2}{t} - 3 = 0$. Умножим на t и получим квадратное уравнение:

$t^2 - 3t + 2 = 0;$

$t_1 = 2; \quad t_2 = 1$

Значит $2^x = 2$ или $2^x = 1$

x=1 или x=0.

Ответ: 0; 1.

Пример. $9^x - 3^x = 72$

Решение. $3^{2x} - 3^x - 72 = 0; \quad \left(3^2\right)^x - 3^x - 72 = 0$.

Заменим $3^x = t, \quad t > 0$, тогда уравнение примет вид:

$t^2 - t - 72 = 0$.

Решаем квадратное уравнение и получаем: t_1= -8, t_2=9.

Т. к. t>0, то t_1= -8 не подходит.

Значит $3^x = 9$, x=2

Ответ: x=2.

Показательные неравенства

Для решения **показательных неравенств** необходимо:

а) привести обе части неравенства к одному основанию, т. е. привести неравенство к виду:

$\boxed{a^{f(x)} < a^{g(x)}}$, тогда

b) если a>1, то f(x)<g(x) (знак неравенства сохраняется);

если 0<a<1, то f(x)>g(x) (знак неравенства меняется на противоположный).

При решении неравенств можно пользоваться формулами:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	5) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$	7) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
2) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$	4) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	6) $a^0 = 1$	8) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Пример 1. $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} > 8^{3x}$

Используя свойства 8, 5 и 1, приведем неравенство к нужному виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

а) $\sqrt{2^5} \cdot 2^{-4x^2} > (2^3)^{3x}$

$$2^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{-4x^2} > 2^{9x}$$
$$2^{\frac{5}{2}-4x^2} > 2^{9x}$$

b) так как основание a=2>1, то показательная функция является возрастающей ⇒ знак неравенства сохраняется

$\frac{5}{2} - 4x^2 > 9x$; $\quad -4x^2 - 9x + \frac{5}{2} > 0$; $\quad 4x^2 + 9x - \frac{5}{2} < 0$; умножим на 2 и получим

$$8x^2 + 18x - 5 < 0$$

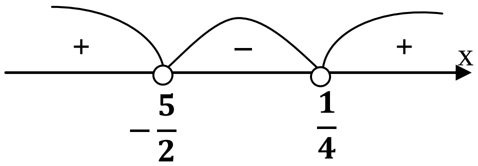
Получили квадратное уравнение, которое решим методом интервалов.

Найдем его нули: $D = 18^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-5) = 484 = 22^2$

$x_1 = \frac{-18+22}{2\cdot 8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \qquad x_2 = \frac{-18-22}{2\cdot 8} = \frac{-40}{16} = -\frac{5}{2}$

Разложим неравенство на линейные множители $\quad 8 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (4x-1)(2x+5) < 0$

Нанесем точки на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$\mathbf{x} \in \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Пример 2. $\quad 6^{\sqrt{3x+7}} \le \frac{6}{6^x}$

$$6^{\sqrt{3x+7}} \le 6^{1-x}$$

Т. к. основание a=6>1, то знак неравенства сохраняется

$$\sqrt{3x+7} \le 1 - x$$

Получили иррациональное неравенство. Для его решения необходимо составить систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ 3x + 7 \ge 0 \\ \left(\sqrt{3x+7}\right)^2 \le (1-x)^2 \end{cases}$$

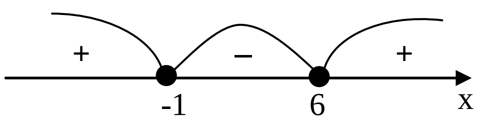
Решим каждое неравенство отдельно:

1. $1 - x \ge 0$; $\quad -x \ge -1$; $\quad x \le 1$; $\quad x \in (-\infty; 1]$
2. $3x + 7 \ge 0$; $\quad 3x \ge -7$; $\quad x \ge -\frac{7}{3}$; $\quad x \in \left[-\frac{7}{3}; +\infty\right)$
3. $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 \le (1-x)^2 \qquad 3x + 7 \le 1 - 2x + x^2$;
$$3x + 7 - 1 + 2x - x^2 \le 0;$$
$$-x^2 + 5x + 6 \le 0$$
$$x^2 - 5x - 6 \ge 0$$

Нули: $x_1 = -1$; $\quad x_2 = 6$

Разложим неравенство на линейные множители $(x+1)(x-6) \ge 0$

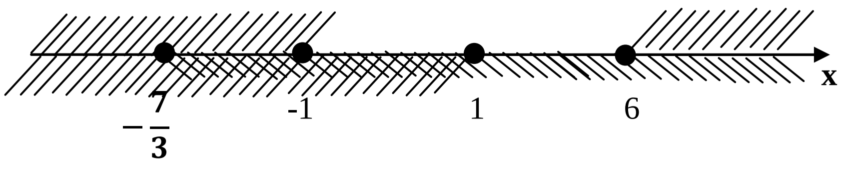
Нанесем точки на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$

Теперь определим общее решение системы: $\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ x \in \left[-\frac{7}{3}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty) \end{cases}$

Найдем решение данной системы. Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



$$\boldsymbol{x} \in \left(-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}; -\mathbf{1}\right)$$

Логарифмические уравнения

1. $\log_a f(x)=k \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)=a^k}$
2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)=g(x)}$

Для того, чтобы привести уравнение к виду (1) или (2), необходимо предварительно сделать подходящие преобразования логарифмов, входящих в уравнение. Такими преобразованиями могут быть:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a \left(f(x)\cdot g(x)\right)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$p\cdot\log_a f(x) = \log_a f(x)^p$$

$1 = \log_a a$, поэтому любое число $k = k\cdot\log_a a = \log_a a^k$

а так же переход от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ \log_{a^m} b = \frac{1}{m}\cdot\log_a b$$

Пример . lg(x-3) + lg(x-2) = 1 – lg5

Решение.

$\boldsymbol{lg(x-3)+lg(x-2)=1-lg5}$

$\boldsymbol{lg(x-3)\,(x-2)=lg10-lg5}$

$\boldsymbol{lg(x-3)\,(x-2)=lg(10/5)}$

$\boldsymbol{lg(x^2-2x-3x+6)=lg2}$

$\boldsymbol{x^2-5x+6=2}$

$\boldsymbol{x^2-5x+4=0}$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x\in(3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x>2 \end{cases}$$

$x\in(3,\infty)$

Ответ. 4

Логарифмические неравенства

Для решения **логарифмических неравенств** необходимо:

a) используя свойства логарифмов и известные приёмы решения логарифмических уравнений, привести неравенство к виду:

$$\boxed{\log_a f(x) < \log_a g(x)};$$

b) составить основное неравенство, используя свойство:
если **a>1**, то **f(x)<g(x)** (знак неравенства <u>сохраняется</u>);
если **0<a<1**, то **f(x)>g(x)** (знак неравенства <u>меняется</u> на противоположный);

c) к основному неравенству присоединить неравенства ОДЗ:
f(x)>0;
g(x)>0;
a>0;

a≠1

d) решить полученную систему неравенств.

Пример. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+3x\right)>-1$

Выполним все действия по алгорифму:

a) Приведем неравенство к нужному виду

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x)>\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$
$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x)>\log_{\frac{1}{4}}4$$

b) Так как основание $a=\frac{1}{4}<1$, то логарифмическая функция является убывающей, значит знак неравенства нужно поменять на противоположный:

$$x^2+3x<4$$

c) Добавим к данному неравенству неравенства ОДЗ (смотреть на условие примера)

$$x^2+3x>0$$

d) Итак, получим систему:

$$\begin{cases} x^2+3x<4 \\ x^2+3x>0 \end{cases}$$

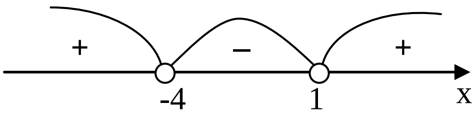
Решим отдельно каждое неравенство

1. $x^2+3x-4<0$

Нули: $x_1=-4$; $x_2=1$

Разложим неравенство на линейные множители $(x+4)(x-1)<0$

Нанесем точки на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$x\in(-4;1)$

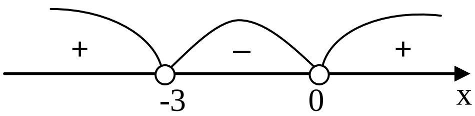
2. $x^2+3x>0$

$x(x+3)>0$

Нули: $x_1=0$; $x_2=-3$

Разложим неравенство на линейные множители $x(x+3)>0$

Нанесем точки на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:

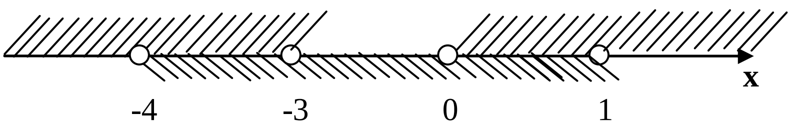


$x\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$

3. Теперь определим общее решение системы:

$$\begin{cases} x\in(-4;1) \\ x\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty) \end{cases}$$

Найдем решение данной системы. Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



$$x\in(-4;-3)\cup(0;1)$$