Министерство образования Республики Беларусь
Молодечненский государственный политехнический колледж

Практическая работа: Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Отработать навыки нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке
2. Развить представление о применении производной
3. Усовершенствовать знания в исследовании функций на монотонность и экстремумы.
4. Развивать аналитическое и логическое мышление учащихся.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные теоретические сведения.
2. Изучить указания к выполнению практической работы.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Вычислить наибольшее и наименьшее значения на заданном отрезке в заданиях № 1, № 3 и № 4.
5. Составить функцию и найти ее максимум (минимум) в заданиях № 2 и № 5.
6. Оформить отчёт.

Для выполнения практической работы используйте следующие теоретические сведения:

<u>Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке</u>:

1. Найти область определения функции D(y).
2. Исследовать функцию на монотонность и точки экстремума. (Найти $y'(x)$ и критические точки; расположить точки на числовой прямой; определить знаки производной; сделать выводы).
3. Определить какие из точек экстремума принадлежат данному отрезку $[a;b]$ и вычислить значения функции в этих точках.
4. Вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. найти *f(a) и f(b).*
5. Сравнить полученные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Указания к выполнению практической работы

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$y = x^3 + 12x^2 + 45x + 20$ на отрезке [-4; -2]

Решение.

1) Находим область определения функции: D(y)=R

2) Находим производную:

$$y' = 3x^2 + 24x + 45$$

3) Находим критические точки, для этого решаем уравнение:

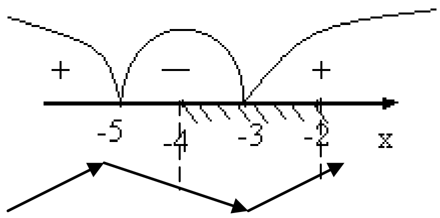
$3x^2+24x+45=0$

$x^2+8x+15=0;$

$D=64-60=4;$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2}{2}$$

$x_1=-5; \quad x_2=-3$



$$y' = 3(x+5)(x+3)$$

x=-5 является точкой максимума; **x=-3** точка минимума.

4) В данный отрезок [-4; -2] входит только одна точка x= -3

5) Вычисляем значения функции на концах отрезка и в точке x=-3

$$y(-4) = (-4)^3 + 12 - (-4)^2 - 45 \cdot 4 + 20 = -32$$

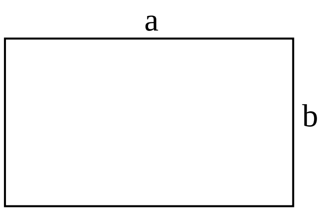
$$y(-2) = (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 - 45 \cdot 2 + 20 = -30$$

$$y(-3) = (-3)^3 + 12 \cdot (-3)^2 - 45 \cdot 3 + 20 = -34$$

Итак, $y_{наиб}=y(-2)=-30$

$y_{наим}=y(-3)= -34$

Пример 2. Из куска проволоки длиной в 50 см согнуть прямоугольник наибольшей площади.



Решение:

Площадь прямоугольника S=a·b

По условию периметр прямоугольника: P=50см, т.е. 2a+2b=50 или a+b=25.

Введём обозначения.

Пусть a = x, тогда b = 25 – a = 25 – x, тогда $S=x\cdot(25-x)=25x-x^2$

Найдем максимум этой функции:

$S' = 25 - 2x$

25-2x=0

$x=\frac{25}{2}$. Значит, $a_{max} = \frac{25}{2}$; $b_{max} = \frac{25}{2}$

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{3} \cdot x - \cos 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1) Область определения: Все действительные числа R.
2) Находим производную: $y' = \sqrt{3} + 2\sin 2x$
3) Находим критические точки, для этого решаем уравнение $y' = 0$:

$$\sqrt{3}+2\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi n, n\in Z$$

$$2x=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi n, n\in Z$$

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

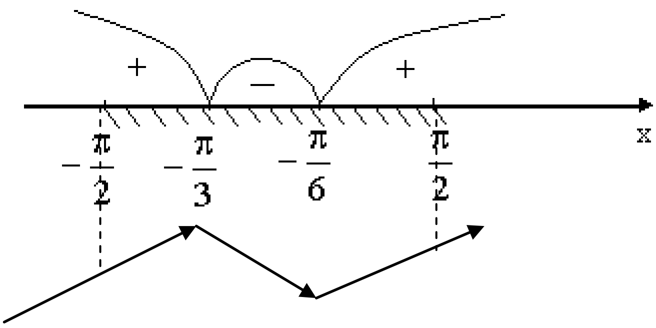
4) Найдём точки, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого будем подставлять различные значения $n\in Z$:

n=0 $x=-\frac{\pi}{6}$;

n=1 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$;

n=2 $x=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{-\pi+6\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$;

n=-1 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi-3\pi}{6}=-\frac{2\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$



В данный отрезок входят точки $x_1=-\frac{\pi}{6}$; $x_2=-\frac{\pi}{3}$

5) Находим значения функции в точках x_1 и x_2 и на концах отрезка:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\cos\left(2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\cos\pi=-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}+1\approx-1{,}72$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}+1\approx 3{,}72$$

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\cos\left(-\frac{2\cdot\pi}{6}\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\approx-1{,}4$$

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\cos\left(-\frac{2\cdot\pi}{3}\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\approx-1{,}3$$

Итак, $y_{наиб}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3{,}72$

$y_{наим}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1{,}72$

Контрольные вопросы:

A. Что называется функцией?
B. Что называется областью определения функции?
C. Определение точек разрыва
D. Определение экстремума функции
E. Правило нахождения экстремума
F. Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке.