

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Филиал «Молодечненский государственный политехнический колледж»
учреждения образования «Республиканский институт профессионального образова-
ния»

Практическое занятие: Построение сечений многогранников.

Разработчик:

И. А. Кочеткова

Цель работы:

- 1) Повторить и закрепить аксиомы стереометрии.
- 2) Вырабатывать умения делать к задачам грамотные чертежи; развивать пространственное мышление.
- 3) Повторить теорему Пифагора и теорему косинусов, площади прямоугольника и треугольника

Оборудование: карта индивидуального задания,
микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
 - a) Какая плоскость называется секущей?
 - b) Какой многоугольник называется сечением?
 - c) Что такое диагональное сечение призмы? Пирамиды?
 - d) Для построения сечения какие основные аксиомы и теоремы стереометрии нужно помнить?
3. Изучить условия задач. Определить способ их решения.
4. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.
7. Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

Опр. Плоскость, которая пересекает многогранник, называется **секущей**.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам, в результате получается многоугольник, который и называется сечением.

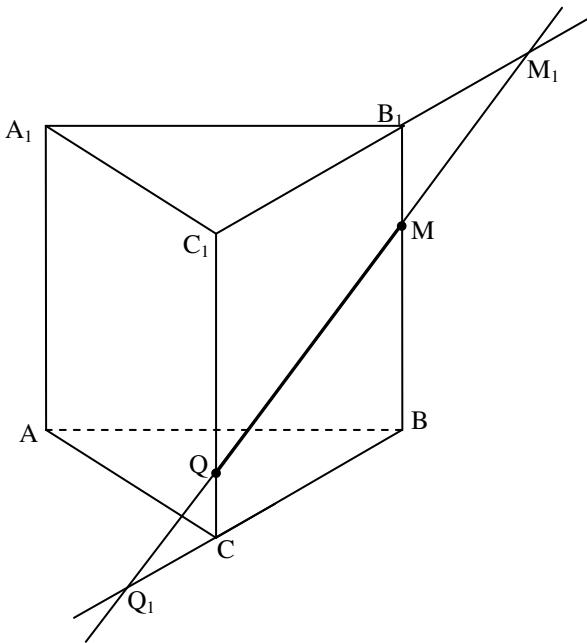
Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника, после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две точки, лежащие в одной грани.

Нужно помнить следующие аксиомы и теоремы:

- 1) Через две точки плоскости проходит одна и только одна прямая
- 2) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой;

- 3) Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая параллельная данной
- 4) Если секущая плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую плоскость и линии пересечения плоскостей будут параллельны

I. Очень важно научиться строить точки пересечения данной прямой с основаниями многогранника

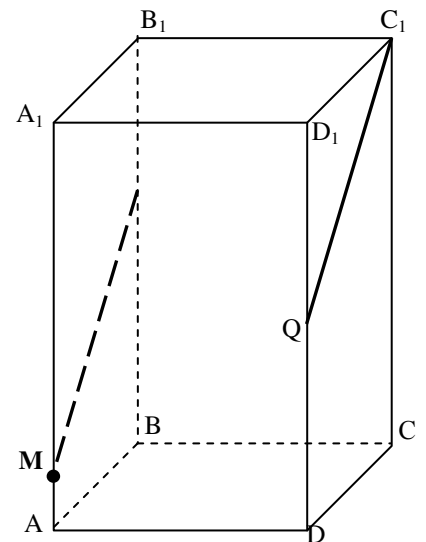


Для этого необходимо определить, какие из ребер оснований находятся в той же плоскости, что и интересующая нас прямая MQ. В нашем случае – это ребро CB в нижнем и C₁B₁ в верхнем основаниях. И именно их и продлеваем до пересечения с прямой QM. Полученные точки Q₁ и M₁ и есть точки пересечения прямой MQ с плоскостями верхнего и нижнего оснований треугольной призмы ABCA₁B₁C₁.

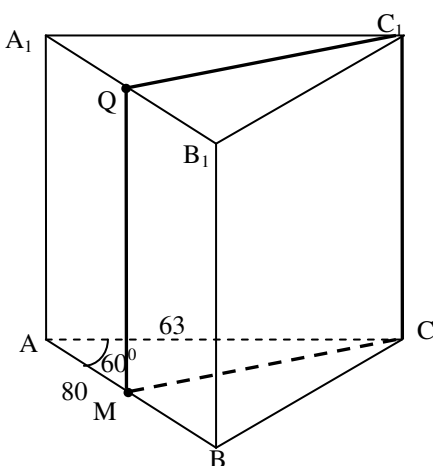
II. Строить параллельные прямые.

Для этого необходимо найти точку в параллельной грани и через нее провести прямую, параллельную данной прямой. В нашем случае – это точка M, она находится в грани (AA₁B₁B) || (CC₁D₁D)

Через M проводим прямую параллельную C₁Q



Указания к выполнению практической работы



Задача 1. В прямой треугольной призме ABCA₁B₁C₁ построить сечение, проходящее через боковое ребро CC₁ и медиану CM. Найти площадь этого сечения, если AB=160, AC=63, ∠A=60°, CC₁=10.

Решение:

Для построения сечения проведем прямую C₁Q параллельно прямой CM и соединим точки Q и M. В сечении получим прямоугольник MQC₁C, так как CC₁ ⊥ CM (призма прямая, значит ребра перпендикулярны основаниям), а MQ || CC₁, значит MQ ⊥ CM

кулярны основаниям), а MQ || CC₁, значит MQ ⊥ CM

$$S_{MQC_1C} = CM \cdot CC_1$$

Длину медианы CM найдем из $\triangle AMC$ ($AB=160 \Rightarrow AM=MB=80$, $AC=63$, $\angle A=60^\circ$) по теореме косинусов:

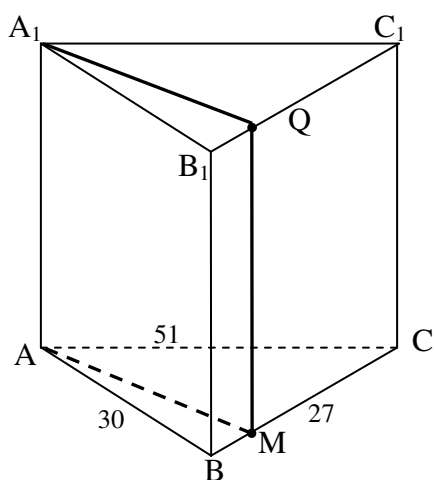
$$CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2 \cdot AM \cdot AC \cdot \cos A = 80^2 + 63^2 - 2 \cdot 80 \cdot 63 \cdot \frac{1}{2} = 6400 + 3969 - 5040 = 5329$$

$$CM = \sqrt{5329} = 73$$

$$S_{MQC_1C} = 73 \cdot 10 = 730$$

Ответ: 730.

Задача 2. В прямой треугольной призме стороны основания равны 51, 30 и 27, а высота призмы 10. Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и большую высоту основания.



Решение.

Проведем большую высоту AM к меньшей стороне $BC=27$.

Для построения сечения проведем прямую A_1Q параллельно прямой AM и соединим точки Q и M . В сечении получим прямоугольник MQA_1A , так как $AA_1 \perp AM$ (призма прямая, значит ребра перпендикулярны основаниям), а $MQ \parallel AA_1$, значит $MQ \perp AM$

$$S_{MQA_1A} = AM \cdot AA_1$$

Длину высоты AM найдем из $\triangle AMC$ по формуле:

$$h = \frac{2S_{\Delta}}{a}$$

где a – сторона, к которой проведена высота. В нашей задаче – это сторона $BC=27$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

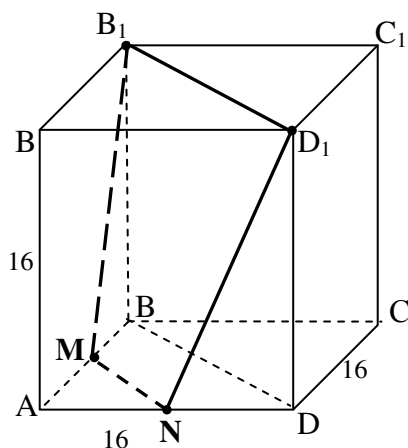
$$p = \frac{30 + 51 + 27}{2} = 54$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{54 \cdot (54-30) \cdot (54-51) \cdot (54-27)} = \sqrt{54 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 27} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 27} = \sqrt{27^2 \cdot 4 \cdot 6^2} = 27 \cdot 2 \cdot 6 = 324$$

$$AM = \frac{2 \cdot 324}{27} = 24$$

$$S_{MQA_1A} = 24 \cdot 10 = 240$$

Ответ: 240



Задача 3. Построить сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1 и D_1 и середину ребра AD , если ребро куба равно 16.

Найти площадь этого сечения

Решение.

- 1) Соединим точки B_1 и D_1 , так как они лежат в одной плоскости.
- 2) Точка N – середина ребра AD , значит $N \in (ABD_1D)$. Следовательно, можно соединить точки N и D_1
- 3) Через точку N проведем прямую NM параллельную прямой B_1D_1
- 4) Соединим точки M и B_1 , лежащие в одной плоскости
- 5) Получившееся сечение MB_1D_1N является трапецией, так как $MN \parallel B_1D_1$ и $MN = \frac{1}{2}BD$ как средняя линия $\triangle ABD$
- 6) Найдем BD по теореме Пифагора:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 256 + 256 = 512$$

$$BD = \sqrt{512} = \sqrt{256 \cdot 2} = 16\sqrt{2}$$

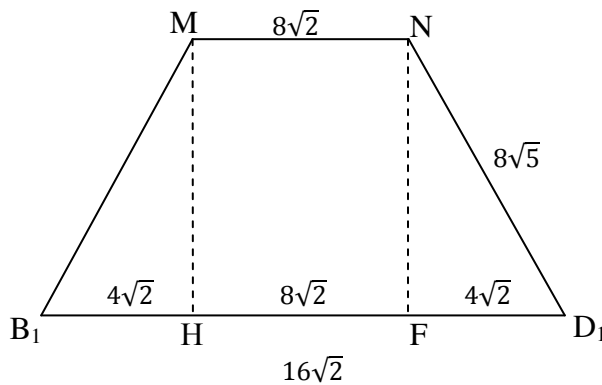
$$B_1D_1 = 16\sqrt{2} \Rightarrow MN = 8\sqrt{2}$$

- 7) Найдем ND_1 по теореме Пифагора из $\triangle NDD_1$:

$$D_1N^2 = ND^2 + D_1D^2 = 64 + 256 = 320$$

$$D_1N = \sqrt{320} = \sqrt{64 \cdot 5} = 8\sqrt{5}$$

- 8) Рассмотрим трапецию MB_1D_1N :



$$S = \frac{MN+B_1D_1}{2} \cdot NF$$

Найдем высоту NF из $\triangle D_1FN$ по теореме Пифагора:

$$NF^2 = D_1N^2 - D_1F^2 = 320 - 32 = 288$$

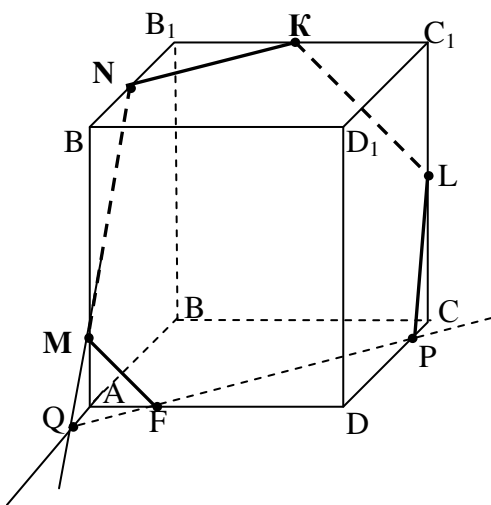
$$NF = \sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = 12\sqrt{2}$$

$$S = \frac{8\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} \cdot 12\sqrt{2}$$

$$= 12\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 288$$

Ответ: 288

Задача 4. Построить сечение параллелепипеда, проходящее через точки M , N и K .



Построение:

- 1) Соединяем точки, которые лежат в одной грани NK и NM
- 2) Строим точку пересечения прямой NM с нижним основанием. Для этого продлеваем прямую NM и ребро AB до пересечения в точке Q .
- 3) Через точку Q проведем прямую в нижнем основании, которая параллельна прямой NK верхнего основания.
- 4) AD пересечется с прямой в точке F , а с ребром DC в точке P .
- 5) Соединим точки M и F
- 6) Через точку K проведем прямую в задней грани (CC_1B_1B) , которая параллельна прямой MF . На ребре CC_1 получим точку L .
- 7) Соединим L и P . Многоугольник $FMNKLP$ является искомым сечением.