Инструкция к практическому занятию: «Решение иррациональных уравнений»

Преподаватель И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Повторить определение арифметического квадратного корня.
2. Отработать методы решения иррациональных уравнений.
3. Развить математическое мышление, наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) дать определение арифметического квадратного корня;
   б) какие утверждения следуют из определения арифметического квадратного корня?
   в) какой основной метод решения иррациональных уравнений?
   г) в каком случае появляются посторонние корни и как от них избавиться?
   д) что такое ОДЗ?

2. Используя указания к практической работе, решить неравенство методом интервалов.

3. Оформить решение.

Указания к выполнению работы

Иррациональные уравнения – это уравнения, которые содержат переменную под знаком корня.

Главный способ избавиться от корня и получить рациональное уравнение – это возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

I. Простейшее иррациональное уравнение – это уравнение вида $\boldsymbol{\sqrt{A(x)} = B(x)}$, где A(x) и B(x) – это выражения, зависящие от переменной x.

$$\boxed{\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases}} \qquad (1)$$

Неравенство $B(x) \geq 0$ в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в квадрат, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

Пример 1. Решить иррациональное уравнение $\sqrt{x-3} + 9 = x$

<u>Решение</u>.

Приведем уравнение к виду (1), для этого перенесем число 9 в правую часть уравнения. Получим

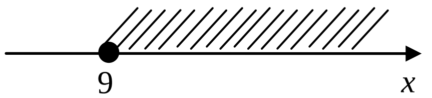
$$\sqrt{x-3} = x - 9$$

Составим систему:

$$\begin{cases} x - 9 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = (x-9)^2 \end{cases}$$

1) Решим линейное неравенство:

$$x - 9 \geq 0$$
$$x \geq 9$$



$x \in [9; \infty)$

2) Решим уравнение $\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = (x-9)^2$.

Для этого воспользуемся формулами:

$\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$ (для левой части уравнения) и $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ (для правой части уравнения).

Получим следующее равносильное уравнение:

$$x - 3 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 9 + 9^2$$
$$x - 3 = x^2 - 18x + 81$$

Перенесем слагаемые в одну часть (в нашем случае перенос осуществлялся в правую часть уравнения) и получим квадратное уравнение:

$$x^2 - 18x + 81 - x + 3 = 0$$
$$x^2 - 19x + 84 = 0$$
$$D = 19^2 - 4 \cdot 1 \cdot 84 = 361 - 336 = 25 = 5^2$$
$$x_1 = \frac{19+5}{2} = \frac{24}{2} = 12$$
$$x_2 = \frac{19-5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Итак, при решении системы получили: $\begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 7 \\ x \in [9; \infty) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 12.$

Ответ. $\{12\}$.

№1. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-1} + x - 3 = 0$; б) $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x$;

в) $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{2x+2} - x = 1$.

II. Если иррациональное уравнение имеет вид $\sqrt{\boldsymbol{A(x)}} + \sqrt{\boldsymbol{B(x)}} = \boldsymbol{C}$, то его необходимо будет возводить в квадрат два раза. Для того, чтобы отсечь посторонние корни перед каждым возведением в квадрат необходимо к ОДЗ добавлять условия.

Условия записываются из утверждений, которые следуют из определения арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{a}$ имеет смысл (вычисляется), если $a \geq 0$;

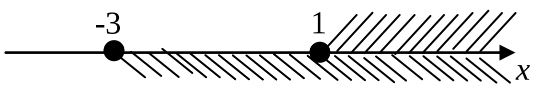
2) при извлечении корня $\sqrt{a} = b$ получаем неотрицательное число $b \geq 0$.

Пример 2. Решить иррациональное уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} = 10$

<u>**Решение**</u>.

1) Составим ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 3x - 3 \geq 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq -3, \\ 3x \geq 3; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq 1. \end{cases}$$



$x \in [1; +\infty)$

2) Возведем левую и правую часть уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3}\right)^2 = 10^2$$

Для левой части уравнения применим формулу $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$.

Получим

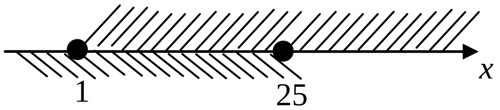
$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{3x-3} + \left(\sqrt{3x-3}\right)^2 = 100$$
$$x+3+2\cdot\sqrt{(x+3)\cdot(3x-3)} + 3x - 3 = 100$$
$$2\cdot\sqrt{(x+3)\cdot(3x-3)} = 100 - x - 3 - 3x + 3$$
$$2\cdot\sqrt{(x+3)\cdot(3x-3)} = 100 - 4x$$
$$\sqrt{(x+3)\cdot(3x-3)} = 50 - 2x$$

3) Получили уравнение (**I**) вида: $\sqrt{A(x)} = B(x)$.
Следовательно, добавляем к ОДЗ условие, при котором данное уравнение можно возводить в квадрат:

$50 - 2x \geq 0$
$-2x \geq -50$
$x \leq 25$
$x \in (-\infty; 25]$

Значит, корень должен быть из интервалов:

$$\begin{cases} x \in [1; +\infty) \\ x \in (-\infty; 25] \end{cases}$$



$x \in [1; 25]$

4) Возведем левую и правую часть уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{3x^2 - 3x + 9x - 9}\right)^2 = (50 - 2x)^2$$
$$3x^2 + 6x - 9 = 2500 - 200x + 4x^2$$
$$3x^2 + 6x - 9 - 2500 + 200x - 4x^2 = 0$$
$$-x^2 + 206x - 2509 = 0$$
$$x^2 - 206x + 2509 = 0$$
$$\boxed{D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\cdot c}$$
$$D_1 = 103^2 - 1\cdot 2509 = 10609 - 2509 = 8100 = 90^2$$
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}}$$
$$x_1 = 103 - 90 = 13$$
$$x_2 = 103 + 90 = 193$$

Итак, при решении уравнения получили: $\begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 193 \\ x \in [1; 25] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 13.$

Ответ. $\{13\}$.

№2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$; б) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$;
в) $\sqrt{4+3x}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

III. Если иррациональное уравнение имеет вид: $\sqrt{\boldsymbol{A(x)}}-\sqrt{\boldsymbol{B(x)}}=\boldsymbol{C}$, где A(x) и B(x) – выражения, зависящие от переменной *x*, то сначала отрицательные слагаемые переносят в противоположные части уравнения (получают сумму неотрицательных слагаемых):

$$\sqrt{\boldsymbol{A(x)}}=\boldsymbol{C}+\sqrt{\boldsymbol{B(x)}}$$

А затем уравнение решают так же как и в случае (II)

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{12+x}-\sqrt{7x+8}=-2$

<u>Решение</u>.

1) Отрицательные слагаемые перенесём в противоположные части уравнения:

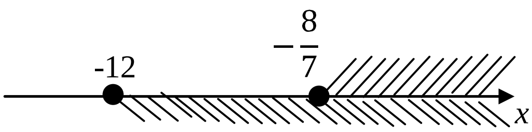
$$\sqrt{x+12}+2=\sqrt{7x+8}$$

2) Составим ОДЗ:

$$\begin{cases}x+12\geq 0\\7x+8\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -12\\7x\geq -8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -12\\x\geq -\frac{8}{7}\end{cases}$$



$$x\in\left[-\frac{8}{7};+\infty\right)$$

3) Возведем левую и правую часть уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x+12}+2\right)^2=\left(\sqrt{7x+8}\right)^2$$

Для левой части уравнения применим формулу $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$**,** а для правой $\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^2=\boldsymbol{a}$

$$\left(\sqrt{x+12}\right)^2+2\cdot\sqrt{x+12}\cdot 2+2^2=7x+8$$

$$x+12+4\cdot\sqrt{x+12}+4=7x+8$$

$$4\cdot\sqrt{x+12}=7x+8-x-12-4$$

$$4\cdot\sqrt{x+12}=6x-8$$

$$2\cdot\sqrt{x+12}=3x-4$$

4) Получили уравнение (**I**) вида. Добавляем к ОДЗ условие, при котором данное уравнение можно возводить в квадрат: $3x-4\geq 0$. Получим,

$$3x-4\geq 0$$

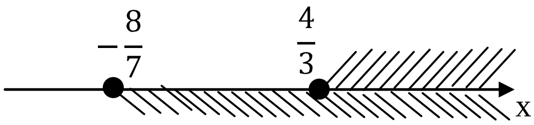
$$3x\geq 4$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

$$x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$$

Значит, корень должен быть из интервалов:

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{8}{7}; +\infty\right) \\ x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$



$$x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right]$$

5) Возведем левую и правую часть уравнения $2 \cdot \sqrt{x+12} = 3x - 4$ в квадрат. Получим

$$\left(2 \cdot \sqrt{x+12}\right)^2 = (3x-4)^2$$

$$4 \cdot (x+12) = 9x^2 - 24x + 16$$

$$4x + 48 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$$

$$-9x^2 + 28x + 32 = 0$$

$$9x^2 - 28x - 32 = 0$$

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c$$

$$D_1 = 14^2 - 9 \cdot (-32) = 196 + 288 = 484 = 22^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$x_1 = \frac{14 - 22}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$x_2 = \frac{14 + 22}{9} = 4$$

Итак, при решении уравнения получили: $\begin{cases} x_1 = -\frac{8}{9} \\ x_2 = 4 \\ x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right] \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Ответ. $\{4\}$.

№3. Решите уравнения:

а) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$; б) $\sqrt{5x-1} - 1 = \sqrt{6-x}$;

в) $2\sqrt{3x-5} - \sqrt{x+1} = 2$.

IV. Метод замены переменной.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 - 5x + 4\sqrt{x^2 - 5x + 10} = 2$

<u>Решение.</u>

Заменим, выражение, которое повторяется в уравнении буквой t:

$$x^2 - 5x = t$$
$$t + 4\sqrt{t + 10} = 2$$

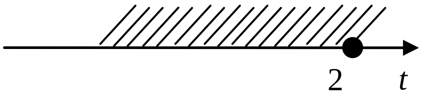
Приведем уравнение к виду (I) и решим его:

$$4\sqrt{t + 10} = 2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t \geq 0 \\ \left(4\sqrt{t + 10}\right)^2 = (2 - t)^2 \end{cases}$$

1) Решим линейное неравенство: $2 - t \geq 0$

$-t \geq -2$

$t \leq 2$



$t \in (-\infty; 2]$

2) Решим уравнение $\left(4\sqrt{t + 10}\right)^2 = (2 - t)^2$.

Для этого воспользуемся формулами $\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{a}$ (для левой части уравнения) и $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{2}}$ (для правой части уравнения). Получим следующее равносильное уравнение:

$$16 \cdot (t + 10) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot t + t^2$$
$$16t + 160 = t^2 - 4t + 4$$

Перенесем слагаемые в одну часть (в нашем случае перенос осуществлялся в правую часть уравнения) и получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 4t + 4 - 16t - 160 = 0$$
$$t^2 - 20x - 156 = 0$$
$$D_1 = 10^2 - 1 \cdot (-156) = 100 + 156 = 256 = 16^2$$
$$t_1 = 10 + 16 = 26$$
$$t_2 = 10 - 16 = -6$$

Итак, при решении системы получили: $\begin{cases} t_1 = 26 \\ t_2 = -6 \\ t \in (-\infty; 2] \end{cases} \Leftrightarrow t = -6.$

Вернёмся к переменной *x*. Для этого вместо *t* в замене $x^2 - 5x = t$ подставим получившееся число:

$$x^2 - 5x = -6$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2$$
$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ. $\{2; 3\}$.

Пример 5. $\sqrt[4]{x-5} - \frac{2}{\sqrt[4]{x-5}} = 1$

Указания: 1) Сделайте замену $\sqrt[4]{x-5} = t,\ \ t \geq 0$

2) Решите уравнение $t - \frac{2}{t} = 1$

3) Решите уравнение $\sqrt[4]{x-5} = t_1$. Для этого возведите обе части уравнения в 4-ую степень.

№4. Решите уравнения:

а) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$;

б) $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$.