МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Филиал «Молодечненский государственный политехнический колледж» учреждения образования «Республиканский институт профессионального образования»

Практическое занятие: Тела вращения (конус, цилиндр, усеченный конус)

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Повторить и закрепить основные элементы конуса и его сечений.
2) Выработать умения делать к задачам наглядные чертежи.
3) Повторить формулы и понятия планиметрии: площадь круга, длина окружности, центральный и вписанные углы, формулы площадей треугольника, прямоугольника, трапеции;
4) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Конус»

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
   a. При вращении какого многоугольника получается конус? Усеченный конус? Цилиндр?
   b. При вращении какой линии можно получить боковую поверхность цилиндра? Конуса? Усеченного конуса?
   c. Точки какой линии при вращении образуют круг? Кольцо?
   d. Как найти объем тела, если в нем есть отверстие?
   e. Как найти поверхность тела, если в нем есть отверстие?
3. Изучить условия задач.
4. Нарисовать ось вращения и правильно расположить многоугольник, который будет вращаться. С помощью таблицы определить и записать, какая линия, какую поверхность будет образовывать при вращении. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Теория

Фигура вращения

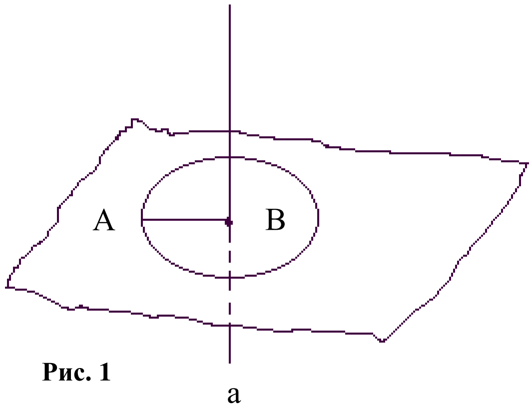


Рис. 1

Пусть даны прямая a и произвольная точка $A \notin a$. Из точки A на прямую a опустим перпендикуляр AB.

Если вращать точку A вокруг прямой a, то получим окружность радиуса AB, с центром в точке B.

Прямую a называют <u>осью</u> <u>вращения</u>.

Рассмотрим теперь некоторую линию, лежащую в одной плоскости с прямой a. Будем вращать плоскость вокруг прямой a.

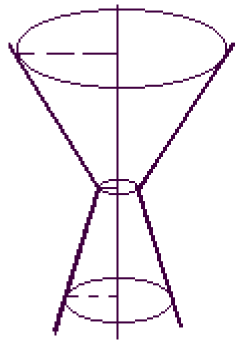
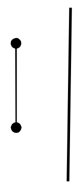
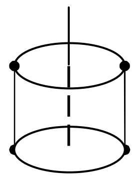
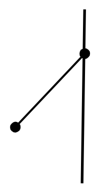
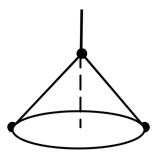
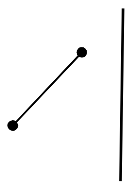
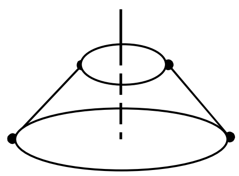
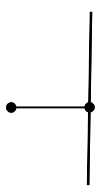
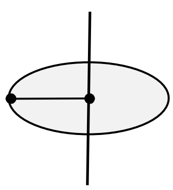
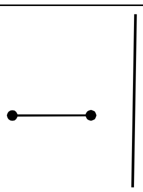
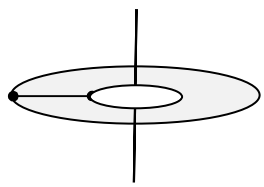


Рис. 2

Каждая точка линии опишет окружность (как на рис.1), перпендикулярную к прямой a и с центром в точке $\in$ a.

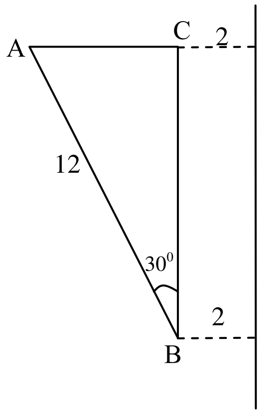
<u>**Опр.**</u> Объединение всех окружностей, полученных при вращении всех точек линии, образует пространственную фигуру, которая называется <u>**фигурой**</u> <u>**вращения.**</u>

Линия (образующая боковую поверхность тела вращения)	Фигура	Боковая поверхность
I 		Цилиндра $\boxed{S_{\text{бок}} = 2\pi RH}$
II 		Конуса $\boxed{S_{\text{бок}} = \pi RL}$ L – образующая конуса
III 		Усеченного конуса $\boxed{S_{\text{бок}} = \pi(R+r)L}$
IV 		Круг $\boxed{S = \pi R^2}$
V 		Кольцо (площадь, ограниченная двумя кругами) $\boxed{S = \pi R^2 - \pi r^2}$

Решение типовых

примеров

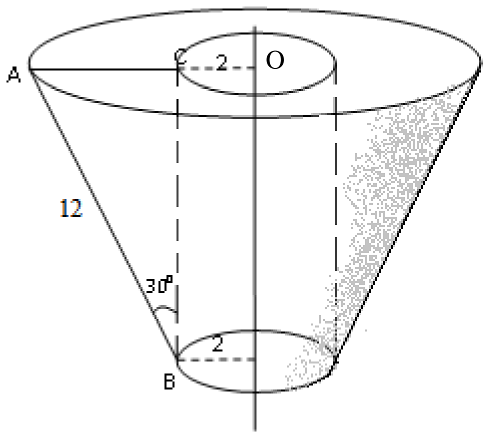
Задача 1. Прямоугольный Δ-к с гипотенузой, равной 12 см и острым углом 30^0 вращается вокруг оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 2 см. Найти V и S тела вращения.



1) Рисуем ось и правильно располагаем прямоугольный треугольник, учитываем, что больший катет лежит напротив большего острого угла ($\angle A=60^0$)
2) Используем таблицу и расписываем, какие тела вращения будем получать:

AC образует кольцо (V);
BC образует боковую поверхность цилиндра (I);
AB образует боковую поверхность усеченного конуса (III)

3) Делаем рисунок данного тела и делаем вывод, что получившееся тело – это <u>усеченный</u> <u>конус</u> <u>с</u> <u>цилиндрическим</u> <u>отверстием</u>



4) $V = V_{\text{ус.конус}} - V_{\text{цилиндр}}$

a) Найдем объем усеченного конуса:

$$V_{\text{ус.конус}} = \frac{1}{3}\cdot \pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

H=BC; R=AO=AC+CO; r=CO=2

Из ΔACB найдем BC и AC:

Катет, лежащий напротив угла в 30^0, равен половине гипотенузы. Значит AC=6. Тогда R=6+2=8

CB найдем по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$CB^2 = AB^2 - AC^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$$

$$CB = \sqrt{108} = \sqrt{36\cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

$H = 6\sqrt{3}$

$$V_{\text{ус.конус}} = \frac{1}{3}\cdot \pi H(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 6\sqrt{3}\cdot (8^2 + 8\cdot 2 + 2^2) = 2\sqrt{3}\pi(64 + 16 + 4) = = 168\sqrt{3}\pi$$

b) Найдем объем цилиндра

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H$$

R=CO=2; $H = CB = 6\sqrt{3}$; значит

$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H = \pi\cdot 2^2\cdot 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\pi$

c) $V = V_{\text{ус.конус}} - V_{\text{цилиндр}} = 168\sqrt{3}\pi - 24\sqrt{3}\pi = 144\sqrt{3}\pi$

5) $S = S_{\text{бок.ус.конуса}} + S_{\text{бок.цилиндра}} + S_{\text{кольца}}$

a) Найдем боковую поверхность усеченного конуса (это внешняя поверхность):

$$S_{\text{бок.ус.конуса}} = \pi(R + r)L = \pi(8 + 2)\cdot 12 = 120\pi$$

b) Найдем боковую поверхность цилиндра (это внутренняя поверхность тела):

$$S_{\text{бок.цилиндра}} = 2\pi RH = 2\pi\cdot 2\cdot 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\pi$$

c) Найдем поверхность кольца (основание тела вращения):

$$S_{\text{кольца}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi 8^2 - \pi 2^2 = 64\pi - 4\pi = 60\pi$$

d) $S = 120\pi + 24\sqrt{3}\pi + 60\pi = 180\pi + 24\sqrt{3}\pi$

Ответ: $V = 144\sqrt{3}\pi$; $S = 180\pi + 24\sqrt{3}\pi$

Задача 2. Треугольник с углом в 60^0, заключённым между сторонами 9 см и 16 см, вращается вокруг большей из этих сторон. Определить V и S тела вращения.

Найдем третью сторону треугольника, чтобы затем определить какого вида этот треугольник. Используем теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cosC$$

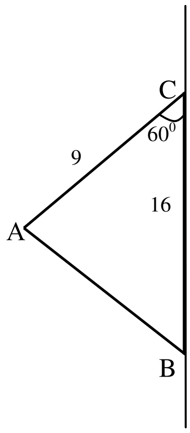
$$c^2 = 9^2 + 16^2 - 2 \cdot 9 \cdot 16 \cdot cos60^0 = 81 + 256 - 2 \cdot 144 \cdot \frac{1}{2} = 337 - 144 = 193$$

$$c = \sqrt{193}$$

Вид треугольника определяется, если сравнить квадрат большей стороны с суммой квадратов двух других сторон:

$$16^2 \text{ и } 9^2 + \sqrt{193}^2$$

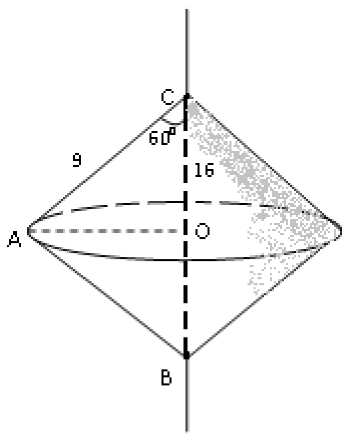
Так как 256 < 81+193, то треугольник <u>остроугольный</u>



1) Используем таблицу и расписываем, какие тела вращения будем получать при вращении данного треугольника:

АС образует боковую поверхность конуса1 (II);
АВ образует боковую поверхность конуса2 (II);

2) Делаем рисунок данного тела и делаем вывод, что получившееся тело – это два конуса, имеющих общее внутреннее основание (тело похоже на игрушку «Юла»)



3) $V = V_{\text{конус1}} + V_{\text{конус2}} = \begin{bmatrix} \text{объем конуса} \\ \frac{1}{3}\pi R^2 H \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot CO + \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot OB = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot (CO + OB) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot CB$$

АО найдем из прямоугольного треугольника АОС:

$$sin60^0 = \frac{AO}{AC}$$

$$AO = AC \cdot sin60^0 = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

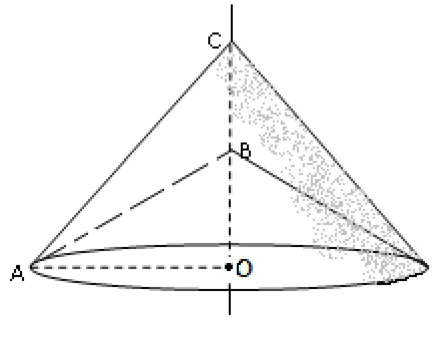
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot CB = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 16 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{81 \cdot 3}{4} \cdot 16 = 324\pi$$

4) $S = S_{\text{бок. конус1}} + S_{\text{бок. конус2}} = \begin{bmatrix} \text{бок. поверхность конуса} \\ S_{\text{бок}} = \pi RL \end{bmatrix} = \pi \cdot AO \cdot AC + \pi \cdot AO \cdot AB =$

$$= \pi \cdot AO \cdot (AC + AB) = \pi \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \left(9 + \sqrt{193}\right) \approx \pi \cdot 7{,}8 \cdot (9 + 13{,}9) = 178{,}6$$

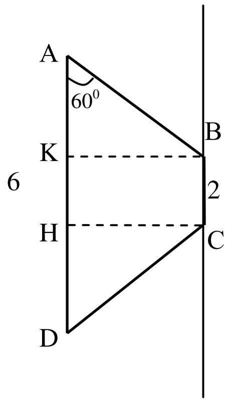
Ответ: $V = 324\pi;\ S = 178{,}6$

<u>Замечание:</u> Если вращается тупоугольный треугольник АВС, то в результате получится тело, так же состоящая из двух конусов, но меньший из них будет являться отверстием внутри большего конуса.



$$V = V_{\text{конус1}} - V_{\text{конус2}}$$
$$S = S_{\text{бок. конус1}} + S_{\text{бок. конус2}}$$

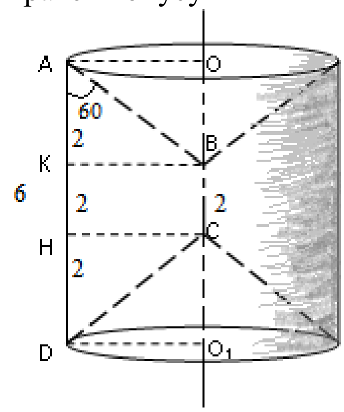
Задача 3. Равнобедренная трапеция с длинами оснований 6 см и 2 см и острым углом 60^0 вращается вокруг меньшего основания. Найти V и S поверхности тела вращения.



1) Используем таблицу и запишем, какие тела вращения будут получаться при вращении данной трапеции:

AD образует боковую поверхность цилиндра (I);
AB образует боковую поверхность конуса 1 (II);
CD образует боковую поверхность конуса 2 (II);

Так как трапеция равнобедренная, то конус1 будет равен конусу 2



2) Делаем рисунок данного тела и делаем вывод, что получившееся тело – это <u>цилиндр с двумя отверстиями в виде равных конусов</u>

3) Найдем объём этого тела:

$$\boxed{V = V_{\text{цилиндра}} - 2V_{\text{конуса}}}$$

a) Найдем объём цилиндра:

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H$$

R=AO; H=AD=6;

В трапеции проведем две высоты ВК и СН из вершин В и С меньшего основания. Тогда трапеция разобьется на прямоугольник КВСН и два равных прямоугольных треугольника ΔАКВ=ΔCHD.
Из свойств прямоугольника следует, что КН=ВС=2. Тогда можно найти АК=HD=(6-2):2 =2
R=АО=КВ. Найдем КВ из ΔАКВ:

$$tg60^0 = \frac{KB}{AK} \Longrightarrow KB = AK \cdot tg60^0 = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$R = AO = KB = 2\sqrt{3}$$

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 6 = \pi \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72\pi$$

b) Найдем объем конуса

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$R = AO = 2\sqrt{3};\ \ H = OB = AK = 2$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3} \cdot\ \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8\pi$$

c) $V = V_{\text{цилиндра}} - 2V_{\text{конуса}} = 72\pi - 2 \cdot 8\pi = 56\pi$

4) Найдем поверхность этого тела: $\boxed{S = S_{\text{бок. цилиндра}} + 2S_{\text{бок. конуса}}}$

a) Найдем боковую поверхность цилиндра (это внешняя поверхность тела):

$$S_{\text{бок.цилиндра}} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}\pi$$

b) Найдем боковую поверхность конусов (это внутреняя поверхность тела):

$$S_{\text{бок.конуса}} = \pi RL$$

$L = AB$. Найдем по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AK^2 + KB^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12 = 16$$

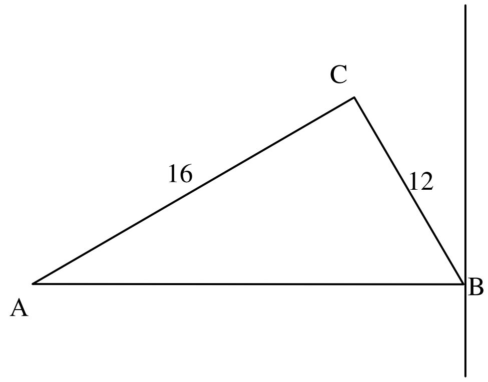
$$AB = \sqrt{16} = 4$$

$$S_{\text{бок.конуса}} = \pi RL = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}\pi$$

c) $S = S_{\text{бок. цилиндра}} + 2S_{\text{бок. конуса}} = 24\sqrt{3}\pi + 2 \cdot 8\sqrt{3}\pi = 40\sqrt{3}\pi$

Ответ: $V = 56\pi;\ S = 40\sqrt{3}\pi$

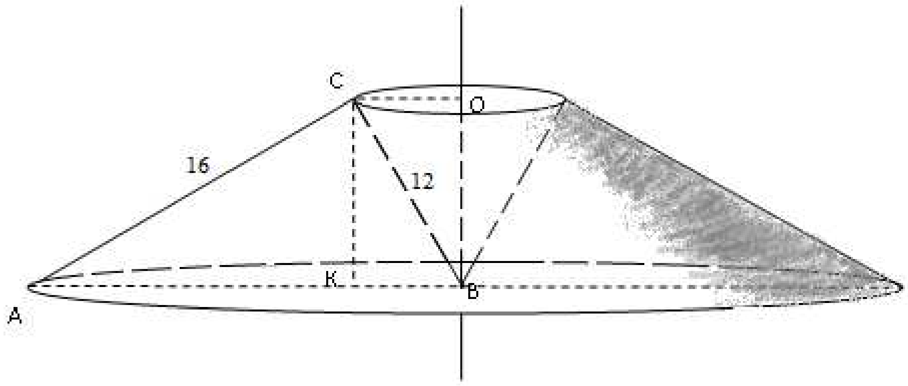
Задача 4. Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см вращается вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведённого через вершину большего острого угла. Найти V тела вращения.



1) Используем таблицу и запишем, какие тела вращения будут получаться при вращении данного треугольника:

AC образует боковую поверхность усеченного конуса;
BC образует боковую поверхность конуса (II);
AB образует поверхность круга (основание тела вращения);

2) Делаем рисунок данного тела и делаем вывод, что получившееся тело – это усеченный конус с коническим отверстием



3) $V = V_{\text{ус.конус}} - V_{\text{конуса}}$

Найдем объем усеченного конуса:

$$V_{\text{ус.конус}} = \frac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

R=AB

Найдем по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 16^2 + 12^2$$
$$= 256 + 144 = 400$$
$$AB = \sqrt{400} = 20$$

H=CK – высота ΔACB

Высота в любом треугольнике может быть найдена через площадь этого треугольника, по формуле:

$$h = \frac{2S_\Delta}{a}$$

где a – сторона, к которой проведена высота. В нашей задаче – это сторона AB = 20

Так как треугольник прямоугольный, то площадь равна половине произведения катетов:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$$
$$CK = \frac{2S_\Delta}{AB} = \frac{2 \cdot 96}{20} = 9{,}6$$

$r = CO = KB$

KB можно найти из прямоугольного треугольника CKB по теореме Пифагора:

$$CB^2 = KC^2 + KB^2 \Longrightarrow KB^2 = CB^2 - KC^2$$
$$KB^2 = 12^2 - 9{,}6^2 = 144 - 92{,}16 = 51{,}84$$
$$KB = \sqrt{51{,}84} = 7{,}2 \Longrightarrow r = 7{,}2$$

$$V_{\text{ус.конус}} = \frac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9{,}6 \cdot (20^2 + 20 \cdot 7{,}2 + 7{,}2^2) = 3{,}2\pi \cdot (400 + 144 + 51{,}84)$$
$$= 1906{,}688\pi \approx 5987$$

Найдем объем конуса:

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

R=CO=KB=7,2; H=OB=CK=9,6

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 7{,}2^2 \cdot 9{,}6 = 3{,}2\pi \cdot 51{,}84 = 165{,}888\pi \approx 521$$
$$V = V_{\text{ус.конус}} - V_{\text{конуса}} = 5987 - 521 = 5466$$

Ответ: $V = 5466$