Учреждение образования «Молодечненский государственный политехнический колледж»

Инструкция к практическому занятию:
«Степень с рациональным показателем. Корень n-ой степени».

Преподаватель И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Отработать определение степени с рациональным показателем.
2. Отработать навыки вычислений значений числовых выражений, содержащих степени и корни.
3. Развить математическое мышление, наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) Записать определение степени с натуральным, целым и рациональным показателями
   б) записать свойства степеней.
   в) дать определение корня n-ой степени.
   г) записать основные свойства корня n- ой степени.

2. Используя указания к практической работе, решить примеры.

3. Оформить решение.

Теория:

Для решения примеров, данной практической работы следует уметь использовать следующие формулы:

Определения

1) Степенью с натуральным показателем называется произведение n множителей, каждый из которых равен числу a: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\ \text{множителей}}}$

2) Для определения степени с целым показателем добавим еще две формулы:

А) $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, где n- натуральное число. Если основание степени дробное число, то эта же формула имеет вид: $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Б) $\boxed{a^0 = 1}$

3) определение степени с рациональным показателем: $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

Свойства степеней

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ 5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Арифметические квадратные корни

Опр. ***Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a*** называется неотрицательное число ***b***, квадрат которого равен ***a***.

$$\boxed{\sqrt{a} = b\ (a \geq 0), \text{если } b^2 = a \text{ и } b \geq 0}$$

Из определения арифметического квадратного корня следует:

1) выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$;
2) для любого числа $a \geq 0$ выполняется неравенство $\sqrt{a} \geq 0$;
3) для любого числа $a \geq 0$ выполняется равенство $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Теорема *Для любого действительного числа **a** верно равенство* $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

Опр. Корнем n- ой степени из действительного числа a, называется такое действительное число b, при возведении которого в степень n получается число a.

$\sqrt[5]{32} = 2$, т. к. $2^5=32$

Основное свойство корня заключается в следующем: величина корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить (или разделить) одновременно на одно и то же отличное от нуля число, т.е. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$

$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}$

Свойства

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$;
3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;
4) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$; основное свойство корня
5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a\ (a \geq 0)$;
6) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{при} \quad a \geq 0, \\ -a, \text{при} \quad a < 0 \end{cases}$
7) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$;
8) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

Указания к выполнению практической работы

Задание №1. Упростить выражение:

$$\frac{6\sqrt{6} - \sqrt{24} + \frac{1}{3}\sqrt{54}}{\sqrt{150}}$$

Решение. Для упрощения выражения используем метод вынесения из-под корня. Для этого числа, стоящие под корнем представим в виде произведения множителей так, чтобы из одного из них корень мог быть вычислен:

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{54} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9 \cdot 6} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6}$$
$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5 \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

Тогда дробь упроститься и примет вид:

$$\frac{6\sqrt{6}-\sqrt{24}+\frac{1}{3}\sqrt{54}}{\sqrt{150}}=\frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{6}+\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}=1$$

Ответ: 1.

Задание №2. Упростить выражение:

$$\frac{15}{4+\sqrt{11}}+\frac{48}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\frac{20}{\sqrt{19}+3}-3\sqrt{11}$$

Решение. Для упрощения выражения избавимся от иррациональности в знаменателях каждой дроби. Для этого каждую дробь (числитель и знаменатель) домножим на выражение, сопряженное знаменателю.

Сопряженными выражениями называются выражения, которые образуют формулы. Например, $a+b$ и $a-b$ - сопряженные выражения, так как они образуют формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

1) $\frac{15}{4+\sqrt{11}}=\frac{15(4-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{11})(4-\sqrt{11})}=\frac{15(4-\sqrt{11})}{4^2-\sqrt{11}^2}=\frac{15(4-\sqrt{11})}{16-11}=\frac{15(4-\sqrt{11})}{5}=3(4-\sqrt{11})$
2) $\frac{48}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}=\frac{48(\sqrt{19}+\sqrt{11})}{(\sqrt{19}-\sqrt{11})(\sqrt{19}+\sqrt{11})}=\frac{48(\sqrt{19}+\sqrt{11})}{\sqrt{19}^2-\sqrt{11}^2}=\frac{48(\sqrt{19}+\sqrt{11})}{19-11}=\frac{48(\sqrt{19}+\sqrt{11})}{8}=6(\sqrt{19}+\sqrt{11})$
3) $\frac{20}{\sqrt{19}+3}=\frac{20(\sqrt{19}-3)}{(\sqrt{19}+3)(\sqrt{19}-3)}=\frac{20(\sqrt{19}-3)}{\sqrt{19}^2-3^2}=\frac{20(\sqrt{19}-3)}{19-9}=\frac{20(\sqrt{19}-3)}{10}=2(\sqrt{19}-3)$
4) $3(4-\sqrt{11})+6(\sqrt{19}+\sqrt{11})-2(\sqrt{19}-3)-3\sqrt{11}=12-3\sqrt{11}+6\sqrt{19}+6\sqrt{11}-2\sqrt{19}+6-3\sqrt{11}=18+4\sqrt{19}$

Ответ: $18+4\sqrt{19}$

Задание №3 Вычислить значение выражения: $\left(\left(20\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+0{,}125^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^0+4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Решение. Для решения этого примера используем определения степени с целым и рациональным показателем (смотри теорию).

1) $\left(20\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{81}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{81}}=\frac{2}{9}$
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$
3) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=2^2=4$
4) $3^0=1$
5) $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$
6) $\frac{2}{9}\cdot 9+4\cdot 1+2=2+4+2=8$
7) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

Ответ: 2.

адание №4. Упростить выражение $\frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x^2-7x+2}$, если x< $\frac{1}{3}$

Решение. Для того, чтобы упростить выражение, необходимо использовать формулы: $\sqrt{a^2}=|a|$ и $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

1) Замечаем под корнем формулу сокращенного умножения $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$:
$\sqrt{9x^2-6x+1}=\sqrt{(3x-1)^2}=|3x-1|$
Далее из условия x< $\frac{1}{3}$ делаем вывод, что выражение $3x-1<0$. Значит модуль раскрывается с противоположным знаком $|3x-1|=-(3x-1)$
2) Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2-7x+2$

$$D=7^2-4\cdot 3\cdot 2=49-24=25=5^2$$

$$x_1=\frac{7+5}{6}=2 \qquad x_2=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3}$$

Разложим квадратный трехчлен на линейные множители $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x -$
2=3x−1x−2

3) Итак получили: $\frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x^2-7x+2} = \frac{-(3x-1)}{(3x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-2}$

<u>Задание №5.</u> Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1} + \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1} - \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a - \sqrt{a^3}\right)^{-1}$

<u>Решение</u>. Используем формулы: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ и получим

$$\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}-1\right)\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}+1\right)}{\sqrt[4]{a}-1} + \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}+1\right)}{\sqrt[4]{a}+1} - \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{a^3}\right)^{-1}$$

Сократим дроби внутри скобок и получим выражение:

$$\left(\sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{a} + 1 + \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{a} + 1 - \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{a^3}\right)^{-1} =$$

$$\left(\sqrt[4]{a^2} + 2\sqrt[4]{a} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt[4]{a^2} - 2\sqrt[4]{a} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2} - \sqrt{a^3}}$$

Получили формулы:

$$\left(\left(\sqrt[4]{a}+1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sqrt[4]{a}-1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2} \cdot \left(1 - \sqrt{a}\right)} =$$

$$\left(\sqrt[4]{a}+1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{a}-1\right) \frac{1}{\sqrt{a^2} \cdot \left(1 - \sqrt{a}\right)} =$$

$$\left(\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 - 1\right) \frac{1}{\sqrt{a^2} \cdot \left(1 - \sqrt{a}\right)} = \left(\sqrt{a} - 1\right) \frac{-1}{a \cdot \left(\sqrt{a} - 1\right)} = -\frac{1}{a}$$

<u>Задание №6.</u> Упростить выражение

$$\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^2 - 10 \cdot \sqrt{49 - 20\sqrt{6}}$$

<u>Решение</u>.

1) Получим под корнем формулу $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Для этого предположим, что $a^2 + b^2 = 49$, а $2ab = 20\sqrt{6}$. Тогда $ab = 10\sqrt{6}$

Подберем числа a и b

a	b	$a^2 + b^2$
10	$\sqrt{6}$	$100 + 6 = 106 \neq 49$
5	$2\sqrt{6}$	$25 + 24 = 49$

Значит $\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} = \sqrt{\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^2} = \left|5 - 2\sqrt{6}\right| = 5 - 2\sqrt{6}$ (так как $5 > 2\sqrt{6}$)

2) $10 \cdot \left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 50 - 20\sqrt{6}$
3) Возведем в квадрат $\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^2 = 25 - 20\sqrt{6} + 24 = 49 - 20\sqrt{6}$
4) $49 - 20\sqrt{6} - \left(50 - 20\sqrt{6}\right) = 49 - 20\sqrt{6} - 50 + 20\sqrt{6} = -1$