Молодечненский государственный политехнический техникум

Инструкция к практическому занятию: Определение логарифма. Свойства логарифмов.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Усвоить определение логарифма. Научиться использовать определение логарифма при решении примеров.
2) Научиться использовать теоремы логарифмирования, основное логарифмическое тождество, формулу перехода к новому основанию и следствия из нее.
3) Научиться строить график логарифмической функции и находить её область определения.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы:
   - 2.1. Что называется логарифмом некоторого числа b?
   - 2.2. Какой логарифм называется десятичным? Натуральным?
   - 2.3. Записать основное логарифмическое тождество
   - 2.4. Сформулировать и записать теоремы логарифмирования
   - 2.5. Записать формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.
   - 2.6. Записать следствия из формулы перехода к новому основанию.
   - 2.7. Какая функция называется логарифмической?
   - 2.8. Когда логарифмическая функция будет возрастающей, а когда убывающей?
   - 2.9. Что такое область определения функции? Какие условия должны соблюдаться при нахождении области определения логарифмической функции?
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить неравенства.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

№ 1. Вычислить:

a) $\log_{\frac{1}{12}}(4\log_3 27)$

b) $\log_{36}(-6\cdot lg0{,}1)^2$

Решение.

Вычисляем сначала внутренний логарифм, а затем логарифм от полученного числа

a) $\log_{\frac{1}{12}}(4\log_3 27)=\log_{\frac{1}{12}}(4\cdot 3)=\log_{\frac{1}{12}}12=-1;$

b) $\log_{36}(-6\cdot lg0{,}1)^2=\log_{36}(-6\cdot(-1))^2=\log_{36}36=1$

Ответ: a) -1; b) 1

№ 2. Вычислить, используя основное логарифмическое тождество:

a) $0{,}25^{\log_4 5}$

b) $\sqrt{5}^{2-\log_5 100}$

Решение.

Логарифмическое тождество $\boxed{a^{\log_a b}=b}$

a) $0{,}25^{\log_4 5}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 5}=4^{-1\cdot\log_4 5}=\left(4^{\log_4 5}\right)^{-1}=(5)^{-1}=\frac{1}{5};$

b) В данном примере используем сначала свойство степени: $\boxed{\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}}$

$$\sqrt{5}^{2-\log_5 100}=\frac{\sqrt{5}^2}{\sqrt{5}^{\log_5 100}}=\frac{5}{5^{\frac{1}{2}\cdot\log_5 100}}=\frac{5}{\left(5^{\log_5 100}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{5}{100^{\frac{1}{2}}}=\frac{5}{\sqrt{100}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Ответ: a) 0,2; b) 0,5.

№ 3. Вычислить:

$$lgx=3lg2+\frac{1}{2}lg64-\frac{1}{3}lg8+2$$

Решение.

При решении примера используем теоремы логарифмирования:

$k\cdot\log_a x=\log_a x^k$

$\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)$

$\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$

и формулу $k=\log_a a^k$

$$lgx=3lg2+\frac{1}{2}lg64-\frac{1}{3}lg8+2$$

$$lgx=lg2^3+lg64^{\frac{1}{2}}-lg8^{\frac{1}{3}}+lg10^2$$

$lgx=lg8+lg8-lg2+lg100$

$lgx=\lg(8\cdot 8\cdot 100)-lg2$

$lgx=lg\left(\frac{6400}{2}\right)$

$lgx=lg3200$

$x = 3200$

Ответ. x=3200

№ 4. Найти x, используя определение логарифма:

a) $\log_{0,1} x = -2;$
b) $\log_x 6 = -\frac{1}{3};$
c) $\log_{9\sqrt{3}}\left(\frac{27}{\sqrt[3]{3}}\right) = x$

Решение.

По определению логарифма $\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$ будем составлять уравнения и решать их:

a) $\log_{0,1} x = -2$
$0,1^{-2} = x$
$\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = x$
$10^2 = x$
$100 = x$

Ответ. x=100

b) $\log_x 6 = -\frac{1}{3}$
$x^{-\frac{1}{3}} = 6$
$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 6$
$\sqrt[3]{x} = \frac{1}{6}$
$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$
$x = \frac{1}{216}$

Ответ. $x = \frac{1}{216}$

c) $\log_{9\sqrt{3}}\left(\frac{27}{\sqrt[3]{3}}\right) = x$
$\left(9\sqrt{3}\right)^x = \frac{27}{\sqrt[3]{3}}$

Получили показательное уравнение. Приведем все числа к степеням с основанием 3:

$9 = 3^2;\quad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}};\quad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ и получим уравнение:

$$\left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{3^3}{3^{\frac{1}{3}}}$$

Используем свойства степеней $\boxed{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$ и $\boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$, получим:

$$\left(3^{\frac{5}{2}}\right)^x = 3^{\frac{8}{3}}$$
$$\frac{5}{2}x = \frac{8}{3}$$

$$x=\frac{8}{3}:\frac{5}{2}=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{15}$$

Ответ. $x=\frac{16}{15}$

№ 5. Вычислить:

a) $\frac{lg3+lg\sqrt{2}}{lg2+2lg3}$;

b) $\sqrt{27^{\frac{1}{3\log_{16}3}}+6^{2-\frac{1}{\log_3 6}}+4^{\frac{1}{\log_8 4}}}$

Решение.

а) сначала применим теоремы логарифмирования и получим:

$$\frac{lg3+lg\sqrt{2}}{lg2+2lg3}=\frac{lg\left(3\sqrt{2}\right)}{lg2+lg9}=\frac{lg\left(3\sqrt{2}\right)}{lg18}$$

По формуле перехода к новому основанию $\boxed{\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b}$ имеем:

$$\frac{lg\left(3\sqrt{2}\right)}{lg18}=\log_{18}\left(3\sqrt{2}\right)=\log_{18}\sqrt{18}=\frac{1}{2}$$

Ответ. $\frac{1}{2}$

b) В данном примере используем следствие из формулы перехода к новому основанию $\boxed{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}}$ и основное логарифмическое тождество $\boxed{a^{\log_a b}=b}$.

Выполним пример по действиям:

1. $27^{\frac{1}{3\log_{16}3}}=27^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_{16}3}}=27^{\frac{1}{3}\cdot\log_3 16}=\sqrt[3]{27}^{\log_3 16}=3^{\log_3 16}=16$
2. $6^{2-\frac{1}{\log_3 6}}=\frac{6^2}{6^{\frac{1}{\log_3 6}}}=\frac{36}{6^{\log_6 3}}=\frac{36}{3}=12$
3. $4^{\frac{1}{\log_8 4}}=4^{\log_4 8}=8$
4. $\sqrt{16+12+8}=6$
5.

Ответ. 6

№ 6. Найти область определения функции: $y=\log_{8-x}(x^2-9x+18)$

Решение.

Из определения логарифма имеем следующие условия: $\begin{cases} b>0 \\ a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$

Учитывая указанные условия составим систему неравенств:

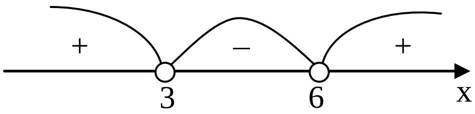
$$\begin{cases} x^2-9x+18>0 \\ 8-x>0 \\ 8-x\neq 1\end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы по отдельности:

1. Неравенство $x^2-9x+18>0$ решим методом интервалов.

Найдем нули $x_1=3$, $x_2=6$.

Разложим неравенство на линейные множители $(x-3)(x-6)>0$
Нанесем точки на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$x \in (-\infty;3) \cup (6;+\infty)$

2. Решим второе неравенство системы:
   8 – x > 0;
   - x > -8;
   x < 8

$x \in (-\infty;8)$

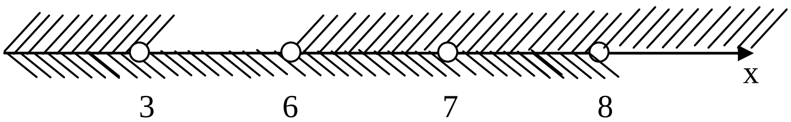
3. Решим третье неравенство системы:
   $8 - x \neq 1$
   $-x \neq 1 - 8$
   $-x \neq -7$
   $x \neq 7$

$x \in (-\infty;7) \cup (7;+\infty)$

Итак, получилась система:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;3) \cup (6;+\infty) \\ x \in (-\infty;8) \\ x \in (-\infty;7) \cup (7;+\infty) \end{cases}$$

Найдем решение данной системы. Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



$x \in (-\infty;3) \cup (6;7) \cup (7;8)$

Ответ. $x \in (-\infty;3) \cup (6;7) \cup (7;8)$