

## Инструкция к практическому занятию: Исследование функций на промежутки выпуклости и точки перегиба

Разработчик:

И. А. Кочеткова

### Цель работы:

- 1) Отработать навыки исследования функций на промежутки выпуклости и точки перегиба.
- 2) Развивать способность анализировать и делать выводы.

**Оборудование:** карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

### Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий и провести исследование функции по правилу нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба.
4. Оформить отчёт.

Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

#### Правило нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба:

1. Найти область определения функции.
2. Найти  $y''(x)$  и критические точки (точки  $x=a$ , в которых  $y''(a)=0$  или  $y''(a)$  не существует).
3. Вторую производную разложить на множители.
4. Критические точки нанести на числовую прямую в порядке возрастания.
5. Определить знаки второй производной на каждом интервале и сделать выводы:
  - а) Если вторая производная функции  $y=f(x)$  на данном промежутке положительна, то кривая вогнута на этом промежутке, а если отрицательна, - то выпукла.

$$f''(x) > 0 \quad \text{кривая вогнута}$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{кривая выпукла}$$



б) если при переходе аргумента через данную критическую точку  $x=a$  вторая производная  $f''(x)$  меняет свой знак, то эта точка перегиба.

6. Определить ординату  $y(a)$  точки перегиба.

## Указания к выполнению практической работы

**Пример 1.** Исследовать функцию  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$  на выпуклость.

Решение.

1. Область определения  $D(y)=\mathbb{R}$ .
2. Найдём вторую производную и критические точки:

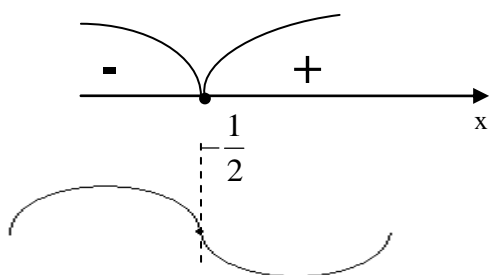
$$y' = 6x^2 + 6x - 12$$

$$y'' = (6x^2 + 6x - 12)' = 12x + 6$$

$$12x + 6 = 0; \quad 12x = -6; \quad x = -\frac{1}{2}.$$

3. Нанесём критическую точку на числовую прямую и определим знаки второй производной на каждом из полученных интервалов:

$$y'' = 12x + 6$$



Запишем ответ: График функции на промежутке

$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$  выпуклый вверх, а на промежутке

$x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$  вогнутый (или выпуклый вниз).

**Пример 2.** Исследовать функцию  $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 9$  на промежутки выпуклости и точки перегиба.

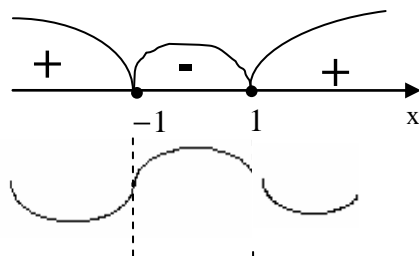
Решение.

1. Область определения  $D(y)=\mathbb{R}$ .
2. Найдём вторую производную:  
 $y' = 4x^3 - 12x + 5;$   
 $y'' = (4x^3 - 12x + 5)' = 12x - 12$
3. Определим критические точки:

$$12x^2 - 12 = 0;$$

$$x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1$$

4. Нанесём эти точки на числовую ось и определим знак второй производной на каждом интервале.



На интервалах  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$  график функции вогнутый (или выпуклый вниз), а на промежутке  $x \in (-1; 1)$  выпуклый (выпуклый вверх).

Т. к. проходя через точки  $x = -1$  и  $x = 1$ , вторая производная меняет свой знак, то они являются абсциссами точек перегиба. Найдём ординаты:

$$y(-1) = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 9 = -19$$

$$y(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 9 = -9$$

$(-1; -19)$  и  $(1; -9)$  – точки перегиба графика функции.

**Пример 3.** Исследовать функцию  $y = \frac{1}{x-2} + 3$  на промежутки выпуклости и точки перегиба.

1. Область определения:  $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

2. Найдём вторую производную:

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2} \cdot (x-2)' + (3)' = -\frac{1}{(x-2)^2} = -(x-2)^{-2};$$

$$y'' = (-(x-2)^{-2})' = -(-2) \cdot (x-2)^{-3} \cdot (x-2)' = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

3. Определим критические точки:

$$\frac{2}{(x-2)^3} = 0; \quad x \neq 2$$

4. Нанесём эту точку на числовую ось и определим знак второй производной на каждом интервале.

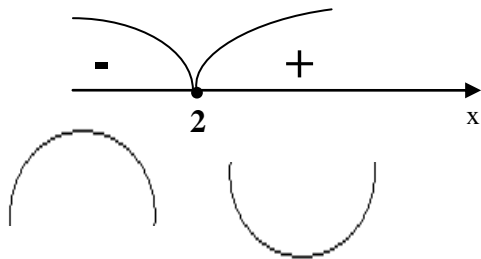


График функции на промежутке  $x \in (-\infty; 2)$  выпуклый вверх, а на промежутке  $x \in (2; +\infty)$  вогнутый (или выпуклый вниз)

В точке  $x=2$  не существует не только вторая производная, но и сама функция, т. е. эта точка не может быть точкой перегиба (в ней функция терпит разрыв и график представляет собой две непрерывные части).

### Контрольные вопросы:

- 1) Что называется областью определения функции?
- 2) Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
- 3) Необходимое и достаточное условия выпуклости вниз (вверх) графика функции?
- 4) Какая точка называется точкой перегиба функции? Признак точки перегиба?
- 5) Как найти точки перегиба и промежутки выпуклости функции?
- 6) Как находятся точки пересечения графика функции с осью координат?
- 7) Как найти промежутки монотонности функции и точки экстремума?

### Критерии отметки практической работы

#### «Исследование функций на промежутки выпуклости и точки перегиба»

При оценивании учитывается характер допущенных ошибок (существенные, несущественные).

К категории существенных ошибок следует отнести погрешности, связанные с незнанием, непониманием учащимся основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приёмов решения практических заданий, предусмотренной программой.

| № задания | Цена одного задания | Общая сумма | Отметка |
|-----------|---------------------|-------------|---------|
| 1         | 3                   | 1           | 1       |
| 2         | 4                   | 2           | 2       |
| 3         | 6                   | 3           | 3       |
| 4         | 8                   | 4-6         | 4       |
| 5         | 10                  | 7-10        | 5       |
|           |                     | 11-14       | 6       |
|           |                     | 15-18       | 7       |
|           |                     | 19-22       | 8       |
|           |                     | 23-27       | 9       |
|           |                     | 28-31       | 10      |

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, погрешности, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным. «Стоимость» («цена») задания, при выполнении которого допущена несущественная ошибка, снижается на один

балл.

Отметки выставляются на основании общей суммы баллов, набранной учащимися за выполнение практических заданий в соответствии с таблицей