Молодечненский государственный политехнический колледж

Инструкция к практической работе: Логарифмические уравнения.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать некоторые приёмы решения логарифмических уравнений.
2) Научиться приводить логарифмические уравнения к известным алгебраическим уравнениям, используя свойства логарифмов, формулу перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием, свойства логарифмической функции и алгебраические преобразования.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы:
   1) Какое уравнение называется логарифмическим?
   2) Какие приёмы решения логарифмических уравнений существуют?
   3) Какие теоремы и формулы надо знать для преобразования логарифмического уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ или $\log_a f(x) = b$?
   4) Как выяснить какие из найденных корней будут посторонними?
   5) Когда возникает опасность потери корней?
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить уравнения.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется **логарифмическим уравнением**.

При выполнении работы, используйте рассмотренные ниже способы решения логарифмических уравнений.

1) Логарифмическое уравнение $\mathbf{\log_a f(x)=b}$ (1), где a>0, a≠0, b- любое действительное число, равносильно уравнению $\mathbf{f(x) = a^b}$

Пример 1. $\log_2(x^2 - 3x) = 2$

Решение.

$x^2 - 3x = 2^2;$

$x^2 - 3x - 4 = 0;$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 4.$ **Ответ:** {-1;4}

Самостоятельно решите примеры из № 5.31 (1,2,4)

2) Логарифмическое уравнение $\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$ (2) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Из найденных корней следует включить в ответ только те, для которых f(x)>0, g(x)>0, либо необходимо проверить каждый из них подстановкой в исходное уравнение.

Пример 2. $\log_{0,6}(x^2 - 5x + 6) = \log_{0,6}(x-2)$ Ответ: x=4

Замечание. В некоторых случаях, для того, чтобы привести уравнение к виду (1) или (2), необходимо предварительно сделать подходящие преобразования логарифмов, входящих в уравнение. Такими преобразованиями могут быть:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a\big(f(x)\cdot g(x)\big)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$p\cdot\log_a f(x) = \log_a f(x)^p$$

$1 = \log_a a$, поэтому любое число $k = k\cdot\log_a a = \log_a a^k$

а так же переход от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ \log_{a^m} b = \frac{1}{m}\cdot\log_a b$$

Пример 3. $\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5$

Решение.

lg(x-3) + lg(x-2)=l-lg5 lg((x-3)(x-2)) = lg10-lg5

$lg(x^2-3x-2x + 6)=lg2$

$x^2-5x + 6 = 2$

$x^2-5x + 4 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x \in (3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

ОДЗ:

$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3 \\ x > 2 \end{cases}$

$x \in (3, \infty)$

Ответ: 4

Пример 4. $\log_2(x - 2) + \log_8(x - 2) = -4$

Решение. Приведём логарифмы к одному снованию 2

$$\log_2(x-2) + \log_{2^3}(x-2) = -4$$

$$\log_2(x-2) + \frac{1}{3}\cdot\log_2(x-2) = -4$$

$$\log_2(x-2)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right) = -4$$

$$\log_2(x-2)\cdot\frac{4}{3} = -4$$

$$\log_2(x-2) = -3$$

$$x-2 = 2^{-3};\ x = \frac{1}{8}+2 = 2\frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ x \in (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{8}$$

ОДЗ:
$x - 2 > 0;$
$x>2;$
$x\in (2; \infty)$

Ответ: 2,125.

Пример 5. $3\cdot\log_2 x - \log_4 x + 5\cdot\log_{16} x = 7,5$ **Ответ:** 4.

Пример 6. $x - \lg 5 = x \cdot \lg 5 + 2\lg 2 - \lg(1 + 2^x)$

Решение. Применим свойства логарифмов и приведём уравнение к виду (2):

$$x\cdot\lg 10 - \lg 5 = \lg 5 + \lg 4 - \lg(1+2^x)$$

$$x\lg 10^x - \lg 5 = \lg 5^x + \lg 4 - \lg(1+2^x)$$

$$\lg 10^x + \lg(1+2^x) = \lg 5^x + \lg 4 + \lg 5$$

$$\lg(10^x\cdot(1+2^x)) = \lg(20\cdot 5^x)$$

$$10^x\cdot(1+2^x) = 20\cdot 5^x$$

$10^x + 10^x\cdot 2^x = 20\cdot 5^x$ разделим уравнение на 5^x

$2^x + 4^x = 20$ приведём степени к основанию 2

$2^{2x} + 2^x - 20 = 0$ обозначим $\mathbf{2^x = t,\ t > 0}$

$t^2 + t - 20 = 0$ решим квадратное уравнение относительно t

t_1= -5, t_2= 4. t_2 не подходит

Значит $2^x = 4$

x=2.

Ответ: 2.

Пример 7. $\log_2(3^{2x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ **Ответ:** 1;2

3) Способ введения новой переменной

Для того, чтобы свести решение логарифмического уравнения к последовательному решению алгебраического и простейшего логарифмического уравнения, можно ввести переменную **$\log_a f(x)=t$**.

Пример 8. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5$

Решение. Приведём логарифмы к одному основанию 3, а затем введём новую переменную:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = 2 \cdot \log_x 3 + \frac{1}{2} \cdot \log_3 x + 0{,}5$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2} \cdot \log_3 x + \frac{1}{2}.$$

Введём новую переменную $\log_3 x = t$:

$$\frac{1}{t} + t = \frac{2}{t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

Приведём дроби к одному знаменателю и решим получившееся уравнение:

$$\frac{2+2t^2-4-t^2-t}{2t} = 0; \qquad \frac{t^2-t-2}{2t} = 0; \qquad t \neq 0;$$

$t^2 - t - 2 = 0$;

D=1+8=9;

$t_1=2$; $t_2= -1$.

Значит $\log_3 x = 2$ или $\log_3 x = -1$;

$x=3^2=9$ $x=1/3$. **Ответ:** $\left\{9; \frac{1}{3}\right\}$

Пример 9. $x^{\log_3 x - 1} = 9$

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$\log_3\left(x^{\log_3 x - 1}\right) = \log_3 9$; применим теорему $\boxed{\log_a f(x)^p = p \cdot \log_a f(x)}$

$(\log_3 x - 1) \log_3 x = 2$; раскроем скобки

$\log_3^2 x - \log_3 x = 2$; введём новую переменную $\log_3 x = t$

$t^2 - t - 2 = 0$;

D=1+8=9;

$t_1=2$; $t_2= -1$.

Вернёмся к переменной *x*:

$\log_3 x = 2$ или $\log_3 x = -1$;

$x=3^2=9$ $x=1/3$. **Ответ:** $\left\{9; \frac{1}{3}\right\}$

Пример 10. $x^{1+\lg x} = 0{,}001^{-\frac{2}{3}}$ **Ответ:** {0,01; 10}