Министерство образования Республики Беларусь
Молодечненский государственный политехнический колледж

Практическая работа: Решение задач по теме: «Призма, её виды и свойства. Объём, площадь поверхности».

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Повторить и закрепить виды призм и их свойства.
2) Выработать умения делать к задачам грамотные чертежи.
3) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Призма»

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия задач. Определить способ их решения.
4. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.
7. Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

- Если боковые рёбра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае **наклонной**.
- Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется **правильной**.
- Перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего основания, называется **высотой** призмы.
  У прямой и правильной призмы высота равна боковому ребру.
- **Диагональю** призмы называется любой отрезок, соединяющий две не лежащие в одной грани вершины призмы.
- **Диагональное сечение** -это сечение, которое проходит через одну из диагоналей основания и боковое ребро.

Параллелепипед

Наиболее часто встречающимся видом призмы является параллелепипед.

Опр. **Параллелепипедом** называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.

- Все грани параллелепипеда- параллелограммы.
- Параллелепипед, боковые рёбра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется **прямым**.

(Основание прямого параллелепипеда – параллелограмм, а боковые грани – прямоугольники).

- Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется **прямоугольным** параллелепипедом.
  - Все грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники.

- Длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называются его измерениями (длиной, шириной, высотой).

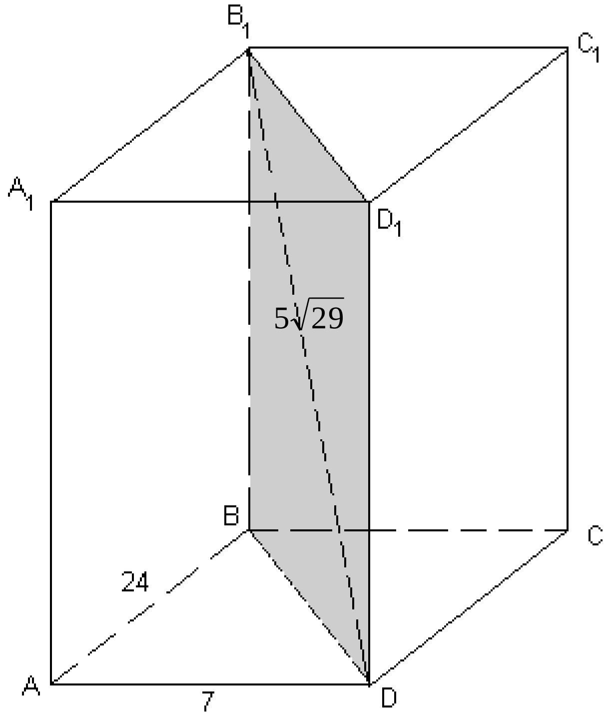
- Квадрат длины диагонали <u>прямоугольного параллелепипеда</u> равен сумме квадратов 3-х его измерений: $a^2+b^2+c^2=d^2$.

Основные формулы:

1) $\boxed{S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}}$, где $S_{осн}$- площадь основания призмы; $S_{бок}$- площадь её боковой поверхности.
2) Площадь боковой поверхности прямой призмы вычисляется по формуле $\boxed{S_{бок}=P_{осн}\cdot H}$.
3) Объём призмы равен $\boxed{V=S_{осн}\cdot H}$.
4) Для куба $V=a^3$; $S_{полн}=6a^2$
5) Для прямоугольного параллелепипеда $V=abc; S_{полн}=2(ab+bc+ac)$

Указания к выполнению практической работы

Задача №1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 см и 24 см, а диагональ параллелепипеда - $5\sqrt{29}$ см. Найти площадь диагонального сечения параллелепипеда.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; AB=24; AD=7; B1D=$5\sqrt{29}$;
Найти: $S(BB_1D_1D)$

BB_1D_1D – прямоугольник, т. к. боковые рёбра перпендикулярны основаниям, значит $S(BB_1D_1D)=BD\cdot B_1B$.

1. Найдём BD.

BD – гипотенуза ΔABD ($\angle A=90^0$ как угол прямоугольника ABCD).

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{576+49}=25$;

2. Найдём B_1B.

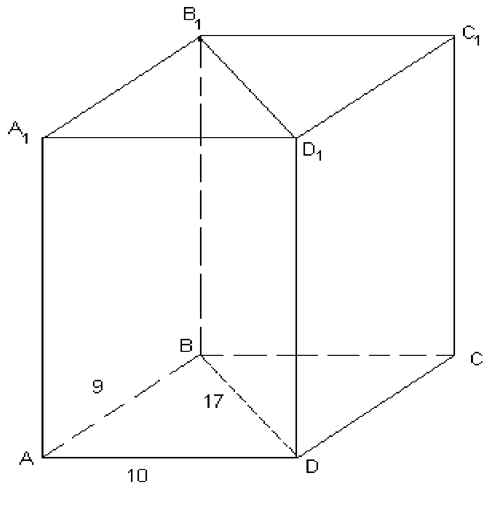
B_1B – катет прямоугольного $\Delta\ B_1BD$ ($\angle B=90^0$, так как $B_1B\perp$плоскости ABCD)

$BB_1=\sqrt{B_1D^2-BD^2}=\sqrt{25\cdot 29-625}=10$;

3. $S(BB_1D_1D)=BD\cdot B_1B=25\cdot 10=250$

Ответ: 250 см^2.

Задача №2. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна 17, а стороны 9 см и 10 см. Полная поверхность параллелепипеда равна 334 см^2. Определить объём параллелепипеда.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед; AB=9; AD=10; $S_{полн}=334см^2$.

Найти: V.

$V=S_{осн}\cdot H$

1. Найдём площадь основания ABCD.

ABCD – параллелограмм, который диагональю BD делится на два равных треугольника, значит $S_{осн} = 2 \cdot S_{\Delta ABD}$. Площадь ΔABD найдём по формуле Герона

$$p = \frac{10+17+9}{2} = 18;\ S_{\Delta} = \sqrt{18 \cdot (18-10) \cdot (18-17) \cdot (18-9)} = 36;\ S_{осн} = 2 \cdot 36 = 72$$

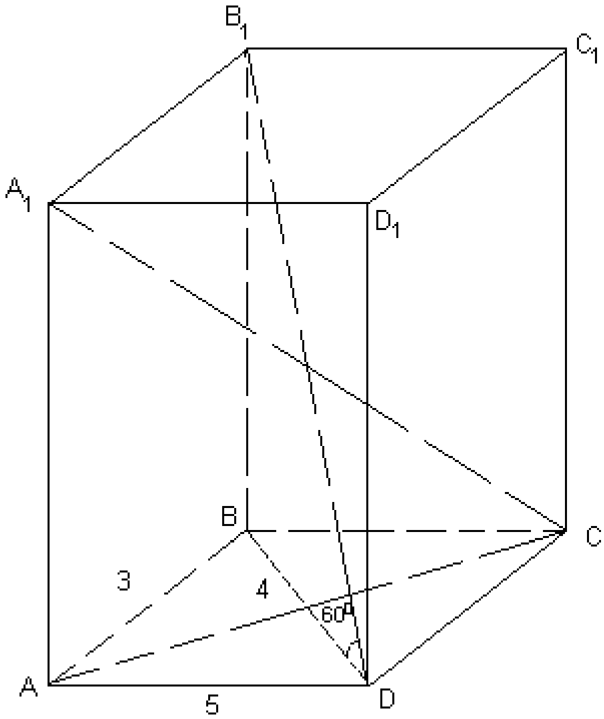
2. Найдём высоту параллелепипеда

Известно по условию задачи, что $S_{полн} = 334 см^2$. С др. стороны $S_{полн} = 2 \cdot S_{осн} + P_{осн} \cdot H$. Выразим из формулы H: $H = \frac{S_{полн} - 2 \cdot S_{осн}}{P} = \frac{334 - 2 \cdot 72}{36} = 5$.

3. V=72•5=360 $см^3$.

Ответ: 360.

Задача № 3. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей – 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол в 60^0. Определить а) диагонали параллелепипеда; б) сторону равновеликого куба.



Дано: AB=3 см; AD=5 см; $\angle B_1DB=60^0$; d_1=4 см

Найти: B_1D; A_1C.

$a_{куба}$

а)

1. найдём вторую диагональ параллелограмма ABCD по формуле $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)$

$$d_2^2 = 2 \cdot \left(AB^2 + AD^2\right) - d_1^2 = 2 \cdot (25+9) - 16 = 52$$

$d_2 = \sqrt{52}$;

значит большая диагональ $AC = \sqrt{52}$, а меньшая BD=4.

2. найдём диагонали параллелепипеда B_1D и A_1C. Для этого рассмотрим сначала прямоугольный ΔB_1BD ($\angle B=90^0$, так как $B_1B \perp$ плоскости ABCD).

$$\cos 60^0 = \frac{BD}{B_1D} \Rightarrow B_1D = \frac{DB}{\cos 60^0} = 4 : \frac{1}{2} = 4 \cdot 2 = 8$$

Теперь рассмотрим прямоугольный ΔA_1CC ($\angle A=90^0$) и найдём A_1C по теореме Пифагора $A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2$, но для этого надо знать длину отрезка A_1A. Так как $A_1A=B_1B$, то найдём B_1B из ΔB_1BD по теореме Пифагора $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Итак $A_1A=B_1B=4\sqrt{3}$. $A_1C = \sqrt{48+52} = 10$.

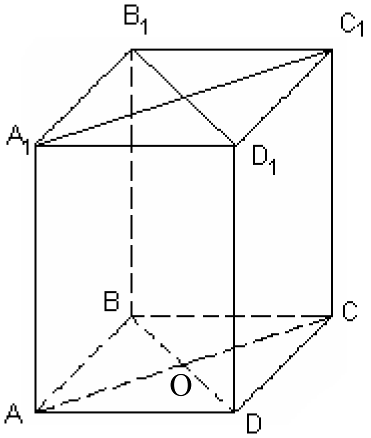
б) Два многогранника называются равновеликими, если <u>равны</u> <u>их</u> <u>объёмы</u>. Значит $V(ABCDA_1B_1C_1D_1)=V_{куба}$. Найдём объём параллелепипеда по формуле $V = S_{осн} \cdot H$. Найдём площадь основания (аналогично как в задаче №2):

$$p = \frac{3+4+5}{2} = 6;\ S_{\Delta} = \sqrt{6 \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)} = 6;\ S_{осн} = 2 \cdot 6 = 12;\ V = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

Значит объём куба равен $48\sqrt{3} \Rightarrow a^3 = 48\sqrt{3}$. Тогда $a = \sqrt[3]{48\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}}$.

Ответ. 8; 10; $2 \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}}$.

Задача № 4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна 24. Площади диагональных сечений равны 8 и 6. Найти S полной поверхности параллелепипеда.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед; ABCD – ромб; $S_{ABCD}=24$; $S_{BB_1D_1D}=6$; $S_{AA_1C_1C}=8$

Найти: $S_{полн}$

$(1)\, S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2=\frac{1}{2}AC\cdot BD$;

выразим d_1 и d_2 через H:

$S_{BB_1D_1D}=BB_1\cdot BD=H\cdot d_1 \Rightarrow d_1=\frac{S}{H}=\frac{6}{H}$;

$S_{AA_1C_1C}=AA_1\cdot AC=H\cdot d_2 \Rightarrow d_2=\frac{S}{H}=\frac{8}{H}$;

подставим d_1 и d_2 в формулу (1) и получим $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{H}\cdot\frac{8}{H}=24$; $\frac{24}{H^2}=24$; H=1;

тогда $d_1=6$ и $d_2=8$.

Т. к. $S_{полн}=2\cdot S_{осн}+P_{осн}\cdot H$, то найдём $P_{осн}=4a$ (у ромба все стороны равны). Для нахождения стороны ромба рассмотрим прямоугольный ΔAOD (диагонали ромба пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам): AO=4; OD=3. Гипотенузу треугольника – сторону AD найдём по теореме Пифагора $AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=\sqrt{16+9}=5$;

Значит $P_{осн}=4a=20$.

$S_{полн}=2\cdot S_{осн}+P_{осн}\cdot H=2\cdot 24+20\cdot 1=68$

Ответ: 68.

Контрольные вопросы:

1) Какой многогранник называется призмой? Какой отрезок называется высотой призмы?
2) Перечислите виды призм.
3) Как найти объём призмы и площадь её поверхности?
4) Какая призма называется прямой? Как находится площадь боковой поверхности прямой призмы?
5) Какая призма называется правильной?
6) Какая призма называется параллелепипедом? Из каких многоугольников он состоит?
7) Назовите виды параллелепипедов.
8) Перечислите свойства прямого и прямоугольного параллелепипедов. В чём их отличия?